# Baccalauréat C Montréal et New York juin 1971

**EXERCICE 1**

Discuter, suivant les valeurs du paramètre $m$, le nombre de racines de l'équation

$$e^{2x} - 2me^{x} + 2m + 8 = 0.$$

(On pourra poser $e^{x} = X$.)
Achever la résolution pour $m = 6$ (on ne demande pas de donner des valeurs décimales approchées des racines).

**EXERCICE 2**

On donne trois nombres réels distincts $a, b$ et $c$, avec $a \neq 0$.
Sachant que les trois nombres $a, b$ et $c$ sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique et que les trois nombres $3a, 2b$ et $c$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, calculer la raison de la suite géométrique.

**PROBLÈME**

On considère, dans un plan rapporté à un repère orthonormé $x'Ox$ et $y'Oy$, l'ensemble des cercles (C) tangents à $x'Ox$. On se propose de transformer ces cercles (C) dans l'inversion de pôle O et de puissance $4a^2$ $(a > 0)$.
On désignera par M le centre de (C) et par $x_0$ et $y_0$ ses coordonnées.

1. Quels sont les cercles (C) qui ont pour inverses des droites ?
   Quel est l'ensemble de leurs centres M ?
   *Dans toute la suite du problème*, on ne considère que des cercles (C) dont le centre M n'est pas situé sur $y'Oy$ $(x_0 \neq 0)$. Tout cercle (C) a alors pour inverse un cercle (C′) de centre M′ dont les coordonnées sont $X_0$ et $Y_0$.
2. **a.** Démontrer que l'on a les relations suivantes :

$$X_0 = \frac{4a^2}{x_0} \quad \text{et} \quad Y_0 = \frac{4a^2 y_0}{x_0}.$$

   **b.** Quels sont les cercles (C) globalement invariants dans l'inversion considérée ? Quel est l'ensemble de leurs centres ?
3. On suppose que le point M décrit la parabole (P) d'équation

$$y = \alpha x^2 + \beta,$$

   où $\alpha$ et $\beta$ désignent deux constantes.
   **a.** Quelle valeur faut-il donner à $\beta$ pour que tous les cercles (C′) aient le même rayon ?
   **b.** Quelle relation doit-il exister entre $\alpha$ et $\beta$ pour que le point M′ appartienne comme M à la parabole (P) ?
4. Dans toute cette quatrième question, le point M décrit la droite (D) d'équation

$$y = mx + p,$$

   où $m$ et $p$ désignent deux constantes non nulles $(m \neq 0$ et $p \neq 0)$.

**a.** Quel est l'ensemble des points $M'$ ? Démontrer géométriquement que les cercles $(C')$ sont tangents non seulement à $x'Ox$, mais aussi à un cercle fixe $(\Gamma)$ et qu'ils sont orthogonaux à un autre cercle fixe $(\Omega)$.

Dans le cas particulier où $m = 1$ et $p = -2a$, déterminer le centre et le rayon des cercles $(\Gamma)$ et $(\Omega)$.

**b.** A et B désignent les points de (D) d'ordonnées respectives $p$ et $-p$. On considère deux cercles appartenant à l'ensemble des cercles (C), soit $(C_1)$ et $(C_2)$, de centres respectifs $M_1$ et $M_2$ situés sur (D) et tels que le birapport $(A, B, M_1, M_2)$ vérifie la condition

$$(A, B, M_1, M_2) = -1.$$

Montrer que les centres des cercles $(C'_1)$ et $(C'_2)$, inverses des cercles $(C_1)$ et $(C_2)$, ont même ordonnée.