∽ Baccalauréat C Montréal–New–York juin 1977 ∾

EXERCICE 1

On considère le nombre complexe $u = 2 - 2\text{i}\sqrt{3}$.

1. Mettre u sous forme trigonométrique et en déduire tous les nombres complexes z tels que $z^4 = u$.
2. Déterminer par la méthode algébrique les nombres complexes X tels que $X^2 = u$, puis les nombres complexes z tels que $z^4 = u$.
3. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

EXERCICE 2

Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
On donne les points A, B, C, D de coordonnées respectives :

$$(1\,;\,1) \qquad (-3\,;\,3) \qquad (2\,;\,2) \qquad (-4\,;\,4)$$

On appelle E et F les milieux respectifs de (A, C) et (B, D).

1. Démontrer qu'il existe une rotation affine unique $\mathscr{R}$ qui transforme A en B et C en D.
Déterminer son angle et son centre I.
2. Démontrer qu'il existe une rotation affine unique $\mathscr{R}'$ qui transforme A en D et C en B.
Déterminer son angle et son centre J.
3. Que peut-on dire du quadrilatère IEJF ?
Etudier $\mathscr{R}' \circ \mathscr{R}$ et $\mathscr{R} \circ \mathscr{R}'$.

PROBLÈME

Partie A

Soit f la fonction numérique définie par

$$\left\{\begin{array}{lrcl}
\forall x \in]-\infty\,;\,0[, & f(x) & = & 1 - \text{e}^x\\
\forall x \in]0\,;\,\infty[, & f(x) & = & \dfrac{\text{e}^x - 1}{\text{e}^x + 1}\\
 & f(0) & = & 0
\end{array}\right.$$

1. **a.** Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^{\star}$. Étudier la dérivabilité en 0.
b. Tracer la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
2. **a.** Vérifier que :

$$\forall x \geqslant 0, \qquad f(x) = \frac{\text{e}^{\frac{x}{2}} - \text{e}^{-\frac{x}{2}}}{\text{e}^{\frac{x}{2}} + \text{e}^{-\frac{x}{2}}}.$$

Déterminez une primitive de la restriction de f à $[0\,;\,+00[$

b. On considère un réel λ ($\lambda > 0$).
M étant un point de coordonnées $(x\,;\; y)$ déterminez l'aire $\mathcal{A}_\lambda$ de l'ensemble des points M vérifiant

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & x & \leqslant & \lambda \\ f(x) & \leqslant & y & \leqslant & 1 \end{array}\right.$$

c. $\mathcal{A}_\lambda$ a-t-elle une limite finie lorsque λ tend vers $+\infty$?

3. a. Soit $y \in]0\,;\,1[$.
Montrer que y admet exactement deux antécédents x et z par f tels que $xz < 0$.
Calculer z en fonction de x lorsque $x > 0$
Calculer z en fonction de x lorsque $x < 0$

b. Étudiez le cas $y = 0$

c. Soit, φ ainsi définie

$$\left\{\begin{array}{lccc} \forall x \in \mathbb{R}^\star, & \varphi(x) & = & z \\ & \varphi(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

Exprimer $\varphi(x)$.
Étudiez la continuité de φ.
Montrer que φ est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et sur $]-\infty\,;\,0]$. φ est-elle dérivable en 0?
Etudiez la limite de $\varphi(x) + x - \text{Log}\,2$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.
Qu'en déduire pour la courbe (Γ) représentative de φ dans $\left(\text{O}\,;\, \overrightarrow{\imath},\, \overrightarrow{\jmath}\right)$? La tracer.

Partie B

Plus généralement, soit une fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ possédant les propriétés suivantes :
α. f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable en tout point de $\mathbb{R}^\star$
β. $\forall x \in]-\infty\,;\,0[,\quad f'(x) < 0$
γ. $\forall x \in]0\,;\,+\infty[\quad f'(x) > 0$
δ. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}$.

1. On note f_1 la restriction de f à $[0\,;\,+\infty[$ et f_2 sa restriction à l'intervalle $]-\infty\,;\,0]$.
Justifier l'existence de f_1^{-1} et de f_2^{-1}.
Ceci permet de démontrer que tout y appartenant à $\left]f(0)\,;\,\ell\right[$ admet exactement deux antécédents x et z par f tels que $xz < 0$.

2. Soit φ définie par

$$\left\{\begin{array}{lccc} \forall x \in \mathbb{R}^\star, & \varphi(x) & = & z \\ & \varphi(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

Montrer que $\quad \forall x < 0 \quad \varphi(x) = f_2^{-1} \circ f(x)$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \forall x < 0 \quad \varphi(x) = f_1^{-1} \circ f(x)$

Étudier la continuité de φ sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que φ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^\star$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \quad \varphi'(x) = \frac{f'(x)}{f'(\varphi(x))}.$$

Étudiez les variations de φ sur $\mathbb{R}$.
Établir que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = +\infty$.

4. Montrer que $\varphi \circ \varphi = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$ ($\mathbf{1}_{\mathbb{R}}$: fonction identité de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Qu'en déduire pour la courbe représentative de φ dans un repère orthonormé ?
5. Peut-on déterminer simplement une famille de fonctions f telle que l'application φ associée soit $-\mathbf{1}_{\mathbb{R}}$?