Montréal et New York septembre 1962

SÉRIE MATHÉMATIQUES

I

L'entier n étant supérieur à 1, montrer que $n\left(n^4-1\right)$ est un multiple de 5.
En déduire les nombres n^p et n^{p+4} se terminent par le même chiffre à droite.

II

1. On considère la fonction suivante de la variable x :

$$y=\frac{x^2+2x+a}{x^2-2x+2},$$

   où a est un nombre donné.

   Déterminer a pour que la fonction passe par un maximum pour $x=\sqrt{2}$; a ayant la valeur trouvée, étudier les variations de y.

   Construire la représentation graphique.

2. On considère deux axes de coordonnées rectangulaires, Ox, Oy, et, sur Ox, les points A et B d'abscisses respectives -1 et $+1$.

   Soit (D) la droite d'équation $y=1$. Dans tout ce qui suit, on appelle M$'$ et M$''$ les points de la droite (D) tels que

$$\frac{\mathrm{M'A}}{\mathrm{M'B}}=\frac{\mathrm{M''A}}{\mathrm{M''B}}=k,$$

   k étant un nombre supérieur à 1.

   Indiquer la construction géométrique de M$'$ et M$''$ et discuter suivant les valeurs de k.

   M étant un point quelconque de (D), calculer en fonction de l'abscisse x de M le rapport $\left(\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}\right)^2$ et retrouver à l'aide du graphique du 1. le résultat de la discussion précédente.

3. Former l'équation du second degré en x qui a pour racines les abscisses, x' et x'', des points M$'$ et M$''$.

   Calculer k de sorte que l'angle M$'$BM$''$ soit droit.

4. Prouver que le cercle de diamètre M$'$M$''$ reste, quand k varie, orthogonal à un cercle fixe.

   En déduire une construction géométrique des points M$'$ et M$''$ tels que l'angle M$'$BM$''$ soit droit.