# Baccalauréat C Montréal et New York juin 1973

**EXERCICE 1**

Le repère $\left(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ est orthonormé

$$\left\|\vec{\imath}\right\| = \left\|\vec{\jmath}\right\| = 2 \text{ cm}.$$

Soit $f$ la fonction numérique de variable réelle $x$ définie par

$$x \longmapsto \frac{x^4+5x^2-6}{x^2}.$$

Calculer, en centimètres carrés, l'aire de la partie du plan constitué des points de coordonnées $(x\,;\ y)$ telles que

$$\begin{array}{l} x \geqslant \dfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 \geqslant y \geqslant f(x), \\ \text{ou} \\ x \leqslant 2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x). \end{array}$$

**EXERCICE 2**

1. Soit $X_1$ une variable aléatoire réelle définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$.
   La loi de probabilité de $X_1$ est donnée explicitement par

   $$\begin{array}{rcr} P(\{X_1 = \phantom{-}1\}) & = & p \\ P(\{X_1 = -1\}) & = & q \\ P(\{X_1 = \phantom{-}0\}) & = & 1-p-q. \end{array}$$

   Soit deux variables aléatoires $X_2$ et $X_3$ réelles, définies sur le même espace probabilisé que $X_1$ de même loi de probabilité que $X_1$.
   On suppose les trois variables aléatoires $X_1$, $X_2$ et $X_3$ indépendantes.
   On désigne par S la variable aléatoire

   $$S = X_1 + X_2 + X_3.$$

   **a.** Quelle est l'espérance mathématique de S; la variance de S?
   Démontrer que S prend les valeurs $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$).
   Quelle est la loi de probabilité de S?

   **b.** Calculer $P(\{S > 0\})$ ; $P(\{S = 0\})$ et $P(\{S < 0\})$.

2. Deux joueurs A et B jouent 3 parties successives d'un même jeu; à chaque partie, le joueur A a une probabilité de 0,5 de gagner. Le joueur B a une probabilité de 0,4 de gagner; il y a une probabilité 0,1 pour qu'il y ait match nul.
   Le vainqueur est celui qui a gagné le plus de parties.
   Calculer les probabilités des évènements suivants :
   — A est vainqueur;
   — B est vainqueur;
   — il n'y a pas de vainqueur.

**EXERCICE 3**

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\left(\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$.
Étant donné deux nombres réels $a$ et $b$, on désigne par $\varphi$ l'endomorphisme de $\mathcal{V}$ dont la matrice dans la base $\left(\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$ est

$$\begin{pmatrix} a+2b & 2b \\ 2b & a-b \end{pmatrix}.$$

**Partie A**

1. **a.** Démontrer que $\varphi$ est bijectif si, et seulement si,

$$(a-2b)(a+3b) \neq 0.$$

   **b.** Discuter, suivant les valeurs de $a$ et de $b$, la nature du noyau de $\varphi$ et de l'image de $\varphi$.
   Donner dans chaque cas une base du noyau de $\varphi$ et de l'image de $\varphi$.

   **c.** Dans quels cas $\varphi$ est-il une homothétie vectorielle de $\mathcal{V}$ ?

2. Étant donné un nombre réel $k$, démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des vecteurs $\vec{u}$ distincts du vecteur nul tels que

$$(1) \qquad \varphi\left(\vec{u}\right) = k\vec{u}$$

   est que $k$ soit solution de, l'équation du second degré en $k$

$$(2) \qquad k^2 - (2a+b)k + a^2 + ab - 6b^2 = 0.$$

   Préciser pour chaque solution de (2) l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ solution de (1).
   Quelle est la matrice de $\varphi$ dans la base $\left(\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$ telle que

$$\vec{\mathrm{I}} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \vec{\mathrm{J}} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}\ ?$$

3. Pour quels couples de nombres réels $(a\ :\ b)$ $\varphi$ est-il une projection orthogonale ?
   Préciser dans chaque cas les éléments de cette projection orthogonale.
   Existe-t-il des couples $(a\ :\ b)$ tels que $\varphi$ soit une rotation vectorielle ?

4. Déterminer les deux couples de nombres réels $(a_1\ :\ b_1)$ et $(a_2\ :\ b_2)$ pour lesquels $\varphi$ est une symétrie orthogonale.
   On désignera par $\varphi_1$ et $\varphi_2$ les deux symétries orthogonales obtenues.
   Quelles sont les droites $(\mathrm{D}_1)$ et $(\mathrm{D}_2)$ invariantes par $\varphi_1$ et $\varphi_2$ respectivement.
   Détermine $\varphi_2 \circ \varphi_1$.

**Partie B**

Soit E un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$ et associé à $\mathcal{V}$.
On désigne par $f$ l'application de E dans E qui au point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point M$'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ telles que

$$x' = 2x - 2y + 2 \quad \text{et} \quad y' = -2x + 5y + 1.$$

1. Démontrer que $f$ est une application affine bijective.
   Déterminer $a$ et $b$ pour que $\varphi$ soit l'endomorphisme associé à $f$.
   Définir $f^{-1}$ analytiquement.
2. Démontrer que $f$ n'a pas de points invariants.
   Démontrer qu'il existe une seule droite affine globalement invariante par $f$.
   Quelles sont les droites affines parallèles à leur image par $f$ ?
3. Soit A le point de E de coordonnées $(-3\,;\,+1)$, B le point de E de coordonnées $(-2\,;\,-1)$.
   Déterminer l'équation du cercle C de diamètre AB.
   Soit $(\Gamma)$ l'image de C par $f$. Démontrer que $(\Gamma)$ est l'ensemble des points de E de coordonnées $(x\,;\,y)$, telles que

$$29x^2 + 8y^2 + 28xy + 6x - 12y = 0.$$