Baccalauréat série C Montréal – New York juin 1969

I.

Déterminer les entiers relatifs n tels que l'entier

$$N = n^2 - 3n + 6$$

soit divisible par 5.

II.

Calculer les racines carrées du nombre complexe

$$z = 1 + 4\mathrm{i}\sqrt{5}.$$

Préciser le module de ces racines et donner des valeurs approchées de leurs arguments.

III.

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $x\mathrm{O}y$.
On désigne par E l'ensemble des points de (P) n'appartenant pas à la droite Ox.
Au point M de E, de coordonnées x et y on fait correspondre le point M$'$ de (P), de coordonnées x' et y', obtenu de la manière suivante :
M$'$ est le point d'intersection de la droite perpendiculaire en O à OM et de la droite parallèle à Oy menée par M.
Cette correspondance est une transformation ponctuelle, qu'on désigne par $\mathscr{T}$.

1. Montrer que la restriction de $\mathscr{T}$ à l'ensemble des points de E d'abscisse non nulle est involutive et que

$$x' = -x \qquad \text{et} \qquad y' = \dfrac{-x^2}{y}.$$

2. Soit (Δ) une droite parallèle à Oy. Quel est l'ensemble de points décrit par M$'$ quand M décrit l'intersection de E et de (Δ) ?
   Soit M$''$ le symétrique de M$'$ par rapport à la droite Ox. Montrer que les cercles de diamètre MM$''$ restent orthogonaux à un cercle fixe et appartiennent à un faisceau, que l'on précisera.
3. Soit (D) une droite strictement parallèle à Ox.
   Quelle est la transformée de (D) ?
   Soit M un point de (D). On désigne par L le point défini par

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}'} = \overrightarrow{\mathrm{OL}}.$$

   Montrer que L décrit une parabole, (P_1), dont on précisera le foyer et la tangente au sommet.
   Écrire l' équation de la tangente en L à (P_1) et montrer qu'elle passe par M.
4. Soit m un paramètre réel et $(_m)$ la droite d'équation

$$y = -(mx + m + 2).$$

   Montrer que les droites $(_m)$ passent par un point fixe.

Utiliser ce résultat et la transformation $\mathscr{T}$ pour montrer que les courbes (Γ_m) d'équation cartésienne

$$y = \frac{x^2}{mx + m + 2}$$

passent par deux points fixes, que l'on déterminera.
Dans le cas où $m = 1$, étudier les variations de y et tracer la courbe, (Γ_1).

N. B. - Les questions **3.** et **4.** sont indépendantes.