Baccalauréat Montréal et New York septembre 1967
Mathématiques élémentaires

I.

Le nombre z appartenant au corps des complexes, résoudre les deux équations suivantes :

$$(1) \qquad z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0,$$

$$(2) \qquad z^2 + 2z + 4 = 0.$$

On désigne par z_1 et z'_1 les racines de l'équation (1), par z_2 et z'_2 celle de l'équation (2).
Calculer le module et l'argument de z_1, de z'_1, de z_2 et de z'_2.

II.

1. a et b étant deux entiers naturels, trouver l'expression générale des fractions $\dfrac{a}{b}$ telles que les fractions $\dfrac{a}{b+18}$ et $\dfrac{a-16}{b}$ soient équivalentes.
2. La fraction $\dfrac{a}{b}$ étant de la forme déterminée au **1.**, montrer que tout diviseur commun à a et b ne peut contenir que deux facteurs premiers distincts, que l'on précisera.

III.

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\overrightarrow{\mathrm{O}x}$, $\overrightarrow{\mathrm{O}y}$, on désigne par $\overrightarrow{\imath}$ le vecteur unitaire de $\overrightarrow{\mathrm{O}x}$ et par $\overrightarrow{\jmath}$ celui de $\overrightarrow{\mathrm{O}y}$.
On désigne par $\mathscr{H}$ l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{2}$ par $\mathscr{S}$ une similitude directe plane, de centre S, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ radian.
On note $\mathscr{H}(\mathrm{M})$ le transformé de M par $\mathscr{H}$ et $\mathscr{S}(\mathrm{M})$ le transformé de M par $\mathscr{S}$.

1. **a.** Calculer, en fonction des coordonnées $(x~;~y)$ de M, celles $\left(x_1~;~y_1 Y l\right)$ de $\mathrm{M}_1 = \mathscr{H}(\mathrm{M})$.
   b. Calculer, en fonction des coordonnées $(x'~;~y')$ de S, de $r = \mathrm{SM}$ et de $\theta = \left(\overrightarrow{\mathrm{O}x},~\overrightarrow{\mathrm{SM}}\right)$, les coordonnées $(x~;~y)$ de M et celles $\left(x_2~;~y_2\right)$ de $\mathrm{M}_2 = \mathscr{S}(\mathrm{M})$.
   c. Déduire de **b.** les expressions de x_2 et y_2 en fonction de x', y', x et y.
2. Démontrer que $\mathrm{M}_2 2$ est confondu avec M_1 si, et seulement si,

$$\left\{\begin{array}{l c l} x &=& \dfrac{3x'}{2} - \dfrac{y'}{2}\\ y &=& -\dfrac{x'}{2} + \dfrac{3y'}{2}\end{array}\right.$$

   Ces relations définissent une nouvelle transformation, $\mathscr{T}$, qui, à tout point S, associe un point $\mathrm{M} = \mathscr{T}(\mathrm{S})$.
3. Quel est l'ensemble transformé par $\mathscr{T}$ de la droite d'équation $ux' + vy' + w = 0$?
   Quel est l'ensemble transformé par $\mathscr{T}$ du cercle de centre $\mathrm{C}(a~;~b)$ et de rayon R ?

4. $S_0(x\ ;0)$ étant fixe $\left(x'_0 > 0\right)$, soit $M_0 = \mathcal{T}(S_0)$.

Quel est l'ensemble des points $S\left(x'\ ;\ y'\right)$ pour lesquels les vecteurs $\overrightarrow{S_0M}$ et $\overrightarrow{SM_0}$ sont orthogonaux? [$M = \mathcal{T}(S)$.]

Quel est l'ensemble des points $S\left(x'\ ;\ y'\right)$ pour lesquels le vecteurs $\overrightarrow{S_0M}$ et $\overrightarrow{SM_0}$ ont même direction ?

5. Montrer que la transformation $\mathcal{T}$ est une similitude de centre O.