Baccalauréat Montréal juin 1959
Série mathématiques et mathématiques et technique

I

1^er^ sujet

Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction irréductible soit égale à une fraction décimale.
Application : Existe-t-il une fraction décimale égale à $\dfrac{39}{78}$; à $\dfrac{182}{130}$?

2^e^ sujet

Étude des variations de la fonction

$$y = \frac{x^3 - x - 1}{x - 2}.$$

Représentation graphique (on prendra sur chacun des axes de coordonnées un vecteur unitaire de longueur égale à 1 centimètre).
Démontrer que cette représentation graphique admet une asymptote oblique et un centre de symétrie.

3^e^ sujet

Un point mobile M décrit un axe $x'x$ et le mouvement de M a pour équation horaire

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\omega t + \beta),$$

où a, b, ω, α et β sont des nombres constants.
Démontrer que le mouvement du point M est la projection d'un mouvement circulaire uniforme.
Application : Étudier le mouvement rectiligne d'équation

$$x = 2a\cos(\omega t + \pi) + a\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right).$$

où a est une longueur donnée.

II

Les notations, relatives à un triangle ABC, utilisées dans ce problème sont les suivantes :
a, b, c, mesures des côtés du triangle ;
A, B, C, mesures des angles du triangle opposés à ces côtés ;
r, mesure du rayon du cercle inscrit ;
h, mesure de la hauteur issue du sommet A.
Enfin $2p$ est le périmètre et I désigne le centre du cercle inscrit.

Première partie

1. Établir les relations

$$2pr = ha \quad \text{et} \quad h = r\left(1 + \frac{\cos\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}}{\sin\frac{\mathrm{A}}{2}}\right).$$

2. On appelle triangle T tout triangle ABC choisi de façon que l'on ait

$$\mathrm{IA}^2 = \mathrm{IB} \cdot \mathrm{IC}.$$

Montrer qu'un triangle T est *caractérisé* par l'une quelconque des relations suivantes : 29 .2 A . B . C.

$$\sin^2\frac{\mathrm{A}}{2} = \sin\frac{\mathrm{B}}{2} \cdot \frac{\mathrm{C}}{2};$$

$$\cos\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2} = 2\sin^2\frac{\mathrm{A}}{2} + \sin\frac{\mathrm{A}}{2};$$

$$h = 2r\left(1+\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\right).$$

Deuxième partie

1. Connaissant l'angle A, calculer les angles B et C d'un triangle T. Discussion.
2. Application pour A = 36°, sachant que

$$\sin\frac{\mathrm{A}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Troisième partie

On appelle triangle t tout triangle ABC dont les sommets B et C sont situés sur une droite fixe X′X, la grandeur de l'angle A et la longueur du rayon r du cercle inscrit restant constantes.

1. Lieu géométrique des sommets A des triangles t admettant pour centre de leurs cercles inscrits un point I fixe.

   Construire, parmi ces triangles t, ceux qui sont aussi des triangles T. Discussion.
2. Lieu géométrique des centres I des cercles inscrits des triangles t dont les sommets A restent fixes.

   Ce lieu est un arc d'hyperbole (H).

   Montrer que les centres des cercles inscrits de ceux de ces triangles t qui sont aussi des triangles T sont situés à l'intersection de l'arc d'hyperbole (H) et d'une parallèle (Δ) à X′X. Discussion.

N. B. Les deuxième et troisième parties sont indépendantes, ainsi que les questions **1.** et **2.** de la troisième partie.