Baccalauréat mathématiques élémentaires
Montréal et New York juin 1964

EXERCICE 1

Montrer que l'équation

$$x^4 + x^2 + 1 = 0$$

a, dans le corps des complexes, quatre racines, que l'on calculera (donner pour chacune le module et l'argument, ainsi que la partie réelle et la partie imaginaire).

EXERCICE 2

Dans un repère orthonormé $X'X, Y'Y, Z'Z$, soit (S) la sphère de rayon 1 centrée à l'origine O des coordonnées.

1. Calculer le volume (arithmétique) $Y(x)$ de (S) compris entre les plans $X = a$ et $X = x$.
2. Représenter graphiquement la fonction $y = V(x)$.
3. Cette courbe a un point anguleux pour $x = a$.
   Calculer la valeur de a pour que les deux demi-tangentes en ce point soient rectangulaires.

EXERCICE 2

On considère les deux points fixes, A et A$'$, de coordonnées $(a\ ;\ O)$ et $(-a\ ;\ 0)$ dans un repère orthonormé $x'\text{O}x, y'\text{O}y$.
On définit sur les points du plan une transformation T qui associe un point M$'$ à tout point M de façon que les triangles OMA et OAM$'$ soient directement semblables (quand les sommets se correspondent dans l'ordre ci-dessus). M est supposé non situé sur Ox.

1. Montrer que $\text{OA}^2 = \text{OM} \cdot \text{OM}'$ et en déduire que T est le produit commutatif d'une inversion de centre O et d'une symétrie par rapport à $x'x$.
   T est-elle involutive ?
2. Calculer les coordonnées x et y de M en fonction de $Z' = \text{OM}'$ et de $\varphi' = \left(\overrightarrow{\text{O}x}\ ,\ \overrightarrow{\text{OM}}\right)$, puis à l'aide de x' et y' seulement ; montrer que 2 Xl

$$x = \frac{a^2 x'}{x'^2 + y'^2}, \qquad y = -\frac{a^2 y'}{x'^2 + y'^2}.$$

   M$'$ est-il maintenant défini si M est sur Ox ?
3. **a.** M décrit une droite passant par O.
   Déterminer analytiquement et géométriquement l'ensemble des positions de MI.
   b. Écrire l'équation du cercle (Γ) de centre $\omega(\lambda,\ ;\ 0)$ orthogonal à celui de centre O et de rayon a.
   Déterminer, analytiquement et géométriquement, le transformé de ce cercle (Γ).
4. Soit B le point de coordonnées $(0\ ;\ b)$. Équation du cercle de diamètre (AB) et transformé de ce cercle par T.
   Solution géométrique.
   En déduire que AM$'$ est toujours tangente au cercle passant par A, O, M.

5. Équation et transformé d'un cercle donné (C) passant par A et A$'$, de centre $\Omega(0\ ;\ \rho)$.

Quand M varie sur (C) la droite MM$'$ passe alors par un point fixe, D, de $y'y$.

Si k désigne le milieu de MM$'$, I celui de AM et I$'$ celui de AM$'$, peut-on en conclure que, quelle que soit la position de M, les points A, O, I, I$'$ sont cocycliques, ainsi que A, Ω, D, K, de même que A, A$'$, M, M$'$?

N. B. - Les questions 3, 4, 5 sont indépendantes.