Baccalauréat C Nancy-Metz juin 1980

EXERCICE 1 **3 POINTS**

1. Montrer que si m est un nombre entier tel que $0 < m < 7$, alors $77 - 11m$ n'est pas divisible par 7 ; en déduire que 77 ne peut pas s'écrire sous la forme $11m + 7n$ avec $m,\ n$ entiers supérieurs à zéro.
2. Soit x un entier ; montrer qu'il existe un entier m, vérifiant $0 < m \leqslant 7$, tel que $x - 11m$ soit divisible par 7 ; en déduire que si $x > 77$, alors x peut s'écrire sous la forme $11m + 7n$ avec $m,\ n$ entiers supérieurs à zéro.
3. On dispose de jetons de deux catégories auxquels on attribue respectivement les valeurs 7 et 11 ; montrer que 59 est la plus grande valeur ne pouvant être réalisée à partir de tels jetons : on constatera que les valeurs réalisables sont les nombres de la forme $11m + 7n$ avec $m,\ n$ entiers positifs ou nuls.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

On définit une application f de l'intervalle $[0~;~1]$ dans $\mathbb{R}$ en posant

$$f(x) = x\sqrt{-\log x}$$

pour $x \in]0~;~1]$, et $f(0) = 0$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. Montrer, en étudiant les variations sur l'intervalle $]0~;~1]$ de la fonction g définie par

$$g(x) = -\log x + x - 1,$$

que pour tout x de cet intervalle

$$-\log x \geqslant 1 - x;$$

étudier, à partir de là, la dérivabilité de f en 1.

3. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé

$$\left(\text{on prendra}\quad \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 0,6 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 0,4\right)$$

PROBLÈME **14 POINTS**

On désigne par $\mathcal{P}$ un plan vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée $\left(\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$.

Pour tout nombre réel non nul a, on note g_a (respectivement h_a) l'application linéaire de $\mathcal{P}$ dans lui-même dont la matrice dans la base $\left(\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ est

$$M\left(g_a\right) = \begin{pmatrix} a & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \dfrac{1}{a}\right) \\ 0 & \dfrac{1}{a} \end{pmatrix}$$

respectivement

$$M\left(h_a\right) = \begin{pmatrix} a & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \dfrac{1}{a}\right) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{pmatrix}$$

Partie A

Dans cette partie on suppose que le nombre réel non nul a est distinct de $+1$ et -1.

1. Montrer qu'il existe une droite D_a de vecteurs $\overrightarrow{u}$ tels que $h_a\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u}$ et une droite D'_a de vecteurs $\overrightarrow{v}$ tels que $h_a\left(\overrightarrow{v}\right) = -\overrightarrow{v}$. Caractériser ces droites. Donner la nature géométrique de h_a.
2. Montrer que h_a est une isométrie vectorielle si, et seulement si, $a = \dfrac{1}{2}$ ou $a = -\dfrac{1}{2}$; donner, pour $a = \dfrac{1}{2}$, des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}$ unitaires tels que

$$h_a\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u} \quad \text{et} \quad h_a\left(\overrightarrow{v}\right) = -\overrightarrow{v}.$$

Partie B

1. Montrer que, quels que soient les nombres réels non nuls a, b, on a

$$g_a \circ g_b = g_b \circ g_a.$$

En déduire que l'ensemble des g_a, lorsque a parcourt $\mathbb{R}^\star$, est un sous-groupe commutatif du groupe des bijections linéaires de $\mathscr{P}$ dans lui-même.

2. Montrer que, quels que soient les nombres réels non nuls a, b, on a

$$h_a \circ h_b = g_{\frac{b}{a}}.$$

Montrer que l'ensemble des g_a et des h_a, lorsque a parcourt $\mathbb{R}^\star$, est un sous-groupe du groupe des bijections linéaires de $\mathscr{P}$ dans lui-même. Est-ce un sous-groupe commutatif ?

Partie C

À partir de cette question le plan vectoriel $\mathscr{P}$ sera également considéré comme un plan affine de direction $\mathscr{P}$; on prend pour origine O, le vecteur $\overrightarrow{0}$ de sorte que les applications linéaires de $\mathscr{P}$ dans lui-même sont aussi les applications affines de $\mathscr{P}$ dans lui-même qui conservent l'origine O.

1. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3x^2+4} - x\sqrt{3}\right).$$

Étudier ses variations ; construire sa courbe représentative C_1 dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

2. On désigne par C la réunion de C_1 et de sa transformée dans la symétrie par rapport à O ; montrer que C est l'ensemble des points de $\mathscr{P}$ dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient

$$\left(y + x\sqrt{3}\right) y = 1.$$

3. Montrer que pour tout nombre réel a non nul on a $h_a(\mathrm{C}) = \mathrm{C}$; en déduire que l'on a également $g_a(\mathrm{C}) = \mathrm{C}$.

Ecrire une équation de C dans le repère $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ du A 2. Quelle est la nature de C ?