↫ Baccalauréat C Nancy-Metz juin 1981 ↬

EXERCICE 1

Soit $f(z) = z^3 + (2+2\text{i})z^2 + az + b$ où $a, b \in \mathbb{C}$.

1. Déterminer les nombres complexes a et b pour que l'on ait

$$f(3\text{i}) = 0 \quad \text{et} \quad f(-1) = 110 - 30\text{i}.$$

2. Montrer qu'il existe deux nombres α et β tels que

$$z^3 + (2+2\text{i})z^2 + (14+35\text{i})z + 123 + 3\text{i} = (z - 3\text{i})\left(z^2 + \alpha z + \beta\right)$$

et calculer α et β.

3. Résoudre complètement dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 + (2+2\text{i})z^2 + (14+35\text{i})z + 123 + 3\text{i} = 0$$

et calculer la somme et le produit des racines. (On remarquera que $145^2 = 21\,025$).

EXERCICE 2

Soit $\mathscr{P}$ le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. Si A et B sont deux points de $\mathscr{P}$, on notera $d(\text{A, B})$ la distance euclidienne de ces deux points.
Soit Γ l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ vérifiant la condition

$$d(M,\ \text{F}) + d(M,\ \text{F}') = 4$$

où F désigne le point de coordonnées $(1\,;0)$ et F' le point de coordonnées $(-1\,;\,0)$.

1. Vérifier que Γ contient les points A, B, C, D et E de coordonnées respectives

$$(-2\,;\,0) \quad (2\,;\,0) \quad \left(-1\,;\,\frac{3}{2}\right) \quad \left(1\,;\,\frac{3}{2}\right) \quad \text{et} \left(-1\,;\,-\frac{3}{2}\right)$$

2. Quelle est la nature de Γ ? Montrer qu'une équation cartésienne de Γ dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ est

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

3. Représenter la courbe Γ et les points A, B, C, D et E (on prendra 3 cm commune unité de longueur).
Soit M_0 un point de $\mathscr{P}$ de coordonnées $\left(x_0\,;\,y_0\right)$ qui n'appartient ni à la droite BC ni à la tangente en B à Γ.
Déterminer les coordonnées du point P d'intersection des droites DE et BM_0 ainsi que les coordonnées du point Q d'intersection des droites AE et CM_0.
En déduire que le point M_0 appartient à Γ si, et seulement si, les points P et Q ont la même ordonnée.

PROBLÈME

Dans tout le problème on considère les trois fonctions numériques de la variable réelle x définies par

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_1(x) & = & \sqrt{x^2+1}+x \\ f_2(x) & = & \sqrt{x^2+1}-x \\ f_3(x) & = & \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\text{Log}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\end{array}\right.$$

où Log désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

Dans cette partie, on note E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ engendré par les fonctions f_1, f_2 et f_3 c'est-à-dire l'ensemble des fonctions numériques f telles qu'il existe trois nombres réels a, b et c vérifiant $f = af_1 + bf_2 + cf_3$

1. Montrer que f_1, f_2 et f_3 sont définies pour tout x réel (il pourra être utile de calculer f_1 et f_2).
2. Montrer que $\text{B} = \left(f_1, f_2, f_3\right)$ est une base de E.
3. Montrer que f_1, f_2 et f_3 sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leurs dérivées.
4. Pour tout f de E, on pose $\varphi(f) = F$, où

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sqrt{x^2+1}f'(x),$$

   (f' désigne la dérivée de f).

   Montrer que φ est une application linéaire de E dans lui-même et déterminer l'expression analytique de φ dans la base B.
5. Montrer que φ est inversible et calculer les composantes de $\varphi^{-1}(f)$ en fonction des composantes de f dans la base B.

   Utiliser ce résultat pour résoudre dans E l'équation

   $$\varphi(f) = \frac{1}{2}\left(f_1 - f_2\right)$$

   En déduire les fonctions f de E qui vérifient

   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$
6. Soit I l'application identique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note

   $$\varphi_0 = \text{I}, \quad \varphi^1 = \varphi, \quad \varphi^2 = \varphi \circ \varphi,$$

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi^{n+1} = \varphi^n \circ \varphi.$$

   Déterminer dans la base B, les composantes de $\varphi\left(f_1\right)$, $\varphi\left(f_2\right)$.

Partie B

On note go la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$g_0(x) = \text{Log}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right).$$

1. Donner une relation simple entre les fonctions g_0, f_2 et f_3 ; montrer que la fonction g_0 est impaire.
2. Étudier les variations de g_0 et construire la courbe $\mathcal{C}_0$ représentative des variations de g_0 dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
3. En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe $\mathcal{C}_0$ l'axe des abscisses, et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 3/4$.
4. Pour tout entier naturel n, $n \geqslant 1$, on définit $g_n = \varphi^n\left(f_3\right) \cdot f_2$.
   Calculer $g_n(x)$, pour un réel x quelconque et montrer que la courbe $\mathcal{C}_n$ représentative des variations de g_n se déduit de la courbe $\mathcal{C}_0$ par une transformation géométrique simple.

Partie C

Dans cette partie, on considère un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{A}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$.
On note Γ_1 la courbe d'équation $y = f_1(x)$ et Γ_2 la courbe d'équation $y = -f_2(x)$ dans le repère $\left(\text{A}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$.

1. Montrer que la courbe Γ_2 est symétrique de la courbe Γ_1 par la symétrie de centre A.
2. Soit M un point de coordonnées $(x ; y)$. Montrer que

$$M \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \iff y^2 - 2xy = 1.$$

3. On pose $\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$.
   Calculer les coordonnées $(x ; y)$ de M dans le repère $\left(\text{A}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ en fonction des coordonnées $(X ; Y)$ du même point M dans le repère $\left(\text{A}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
   En déduire une équation de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ dans le repère $\left(\text{A}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, puis la nature de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.