

Durée : 4 heures

œ Baccalauréat C septembre 1982 Nancy-Metz œ

EXERCICE 1

4 points

1. Dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, on considère l'équation

$$z^2 + 2z + 2 = 0.$$

- a. Résoudre cette équation. On note z_1 et z_2 ses racines.
b. Calculer $z_1^n + z_2^n$ pour l'entier naturel n non nul.
2. Dans \mathbb{C} , résoudre l'équation

$$\frac{z+1}{z-1} = 1.$$

On pose $\mathbb{C}' = \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Montrer que l'application f de \mathbb{C}' vers \mathbb{C}' définie par $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ est une application involutive.

3. Former une équation du second degré admettant $f(z_1)$ et $f(z_2)$ pour racines.

EXERCICE 2

5 points

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \text{Log} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right).$$

1. Montrer que :
tout réel x vérifie $\left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \left(-x + \sqrt{x^2 + 1} \right) = 1$.
2. Déterminer l'ensemble de définition de f et montrer que f est une fonction impaire.
3. Étudier les variations de f .
4. Tracer la courbe \mathcal{C} représentatrice de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Préciser les branches infinies et la tangente au point d'abscisse 0.
5. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} . Déterminer f^{-1} . Tracer la courbe \mathcal{C}' représentatrice de f^{-1} .