Durée : 4 heures

Baccalauréat C Nancy juin 1970

EXERCICE 1

Déterminer les couples (x, y) d'entiers strictement positifs satisfaisant aux trois conditions suivantes :
a. le plus grand commun diviseur de x et y est égal à 5 ;
b. le plus petit commun multiple de x et y est égal à 720 ;
c. il existe un nombre rationnel r tel que $r^2 = \dfrac{x}{y}$.

EXERCICE 2

Soit f la fonction qui, à tout nombre réel x strictement positif, associe le nombre réel

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$$

Montrer que l'on peut trouver trois nombres réels a, b et c tels que, pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

et calculer a, b et c.
Calculer la primitive, F, de f telle que $F(1) = 0$. (On rappelle que la dérivée de Log $|x + k|$, où k est un nombre réel, est égale à $\dfrac{1}{x+k}$)
Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3

On considère un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox et Oy ; on rappelle qu'à tout point d'un tel plan on peut associer un nombre complexe, appelé son affixe.
On désigne par T l'application qui à tout point M du plan, d'affixe z, associe le point M' dont l'affixe, z', est définie par la relation

$$z' = (1 + \mathrm{i})z - \mathrm{i}.$$

1. Cette application est-elle une bijection du plan sur lui-même ?
   Interpréter géométriquement la transformation T : on notera A le point double de cette transformation.
   Calculer l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\mathrm{A}M}, \overrightarrow{MM'}\right)$, en supposant M différent de A.
   Déterminer le lieu de $M' = T(M)$ lorsque M parcourt le cercle de centre O et de rayon 1.
2. Montrer qu'il existe un point B du plan distinct de A, et un seul, tel que les affixes z_0 de B et z_0' de $\mathrm{B}' = T(\mathrm{B})$ soient liées par la relation z_0ů$z_0' = 1$.
   Construire B et B$'$.
   Soit A$'$ le symétrique de A par rapport à O. Prouver que les points A, A$'$, B et B$'$ appartiennent à un même cercle, (C).
   Étudier le faisceau de droites (Ox, Oy, OB, OB$'$) ; en déduire que la droite BB$'$ passe par le pôle P de la droite AA$'$ par rapport à (C).

3. Soit M un point du plan, M' son transformé par T et G le barycentre des points A, M, M' affectés respectivement des coefficients $+1$, $+2$, -1.

Effectuer une construction géométrique de G, connaissant A, M et M'. Calculer l'affixe, Z, de G en fonction de l'affixe, z, de M.

Interpréter géométriquement la transformation qui à M associe G et déterminer le lieu de G lorsque M décrit l'axe Oy.

4. Soit x et y les coordonnées cartésiennes de M et z' l'affixe du transformé, M', de M par T. Calculer le module, R, du nombre complexe z' en fonction de x et y.

On suppose que M décrit la droite d'équation $y = x$; étudier les variations de R en fonction de x et tracer la courbe représentative de la fonction ainsi définie.