Baccalauréat C Nancy juin 1973

EXERCICE 1

Soit f la fonction de $]-1~;~+1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = -x + \text{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

où Log désigne le Logarithme népérien.

1. Étudier cette fonction et construire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$.
2. Soit g la fonction définie sur $]-1~;~+1[$ par :

$$g(x) = -\frac{x^2}{2} + (1+x)\text{Log}\,(1+x) + (1-x)\text{Log}\,(1-x)$$

   Calculer $g'(x)$ pour x appartenant à $]-1~;~+1[$.
3. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de l'ensemble des points M de coordonnées $(x~;~y)$ vérifiant

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)$$

EXERCICE 2

Calculer le nombre complexe $(3-2\text{i})^4$.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$z^4 = 4(119+120\text{i})$$

et représenter les images des solutions.

PROBLÈME

L'espace vectoriel $\mathscr{V}_3$ euclidien, orienté, de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, est muni de la base orthonormée directe $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath},~\overrightarrow{k}\right)$. L'espace affine euclidien E_3 est muni du repère $\mathscr{R} = (\text{O},~\mathscr{B})$ et orienté par $\mathscr{B}$.
On donne les vecteurs

$$\overrightarrow{I} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath} - \overrightarrow{k}\right),\ \overrightarrow{J} = \frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath} + 2\overrightarrow{k}\right),\ \overrightarrow{K} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath} + 2\overrightarrow{k}\right)$$

Partie A

1. Vérifier que $\left(\overrightarrow{I},~\overrightarrow{J},~\overrightarrow{K}\right)$ est une base orthonormée.
2. Quelles sont, dans la base $\mathscr{B}$, les formules analytiques de l'endomorphisme ρ qui transforme $\mathscr{B}$ en $\left(\overrightarrow{I},~\overrightarrow{J},~\overrightarrow{K}\right)$.
3. Montrer que ρ est une rotation dont l'axe est engendré par le vecteur $\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k}$.
   Soit P le plan vectoriel orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k}$ et orienté par le vecteur unitaire $\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k}\right)$; calculer la mesure de la restriction de ρ à P. (On pourra calculer $\rho\left(\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}\right)$.

Partie B

On donne l'endomorphisme φ de $\mathcal{V}_3$ défini dans la base $(\mathscr{B})$ par les formules :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 6y+3z \\ y' & = & x-2y-2z \\ z' & = & 2x+8y+2z \end{array}\right.$$

On appelle N_1 et U_1 les noyau et image de φ, N_2 et U_2 les noyau et image de $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$.

1. Trouver en fonction de $\overrightarrow{I}$, $\overrightarrow{J}$, $\overrightarrow{K}$
   a. une base de N_1 .
   b. une base de U_1 après avoir calculé les composantes des vecteurs $\varphi\left(\overrightarrow{I}\right)$, $\varphi\left(\overrightarrow{J}\right)$, $\varphi\left(\overrightarrow{K}\right)$ dans la base orthonormée $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$. Vérifier que N_1 est contenu dans U_1.
   c. Déterminer N_2 et U_2 et les comparer à N_1 et U_1. En déduire que $\varphi^3 = \omega$, où ω est l'endomorphisme nul.

Partie C

Soit f l'application affine de E_3 qui admet O comme point invariant, et φ comme endomorphisme associé.
Soit R le plan affine passant par O et de direction le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$.
Soit Q le plan affine passant par O et de direction le plan vectoriel U_1.

1. Montrer que la restriction h de f à R est une bijection de R sur Q. Soit M un point de R, trouver les coordonnées dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ du point $h(M)$, en fonction de celles de M.
2. On donne dans le plan (R) la parabole (Γ) de sommet O et de foyer F tel que $\overrightarrow{\text{OF}} = \overrightarrow{J}$.
   Montrer que la transformée de (Γ) par h est une parabole $\left(\Gamma'\right)$ du plan (Q) dont on déterminera le sommet, le foyer et le paramètre.
3. Soit (γ) la parabole représentée dans le repère (O, $\mathscr{B}$) par les équations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^2 & = & 4y \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

   Soit r la rotation de $_3$, laissant O invariant et dont l'endomorphisme associé est ρ. Quelle est l'image de (γ) par l'application affine $f \circ r$?