Baccalauréat C Nancy juin 1974

EXERCICE 1

Dans un plan affine euclidien E rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ la position à l'instant t d'un point mobile M est définie par

$$\overrightarrow{\text{O}M} = \text{e}^{2t}\vec{\imath} + \left(t - \frac{1}{4}\text{e}^{2t}\right)\vec{\imath}.$$

On suppose que t décrit $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe une relation du type $y = f(x)$ entre les coordonnées x et y de M, où f désigne une fonction indépendante de t définie sur l'intervalles $]0~;~+\infty[$. Étudier la fonction f et construire la trajectoire du point M.

2. À chaque instant t on désigne par $\overrightarrow{v(t)}$ le vecteur-vitesse et par $\overrightarrow{\gamma(t)}$ le vecteur accélération. Etudier l'ensemble des réels t tels que

$$\cos \widehat{\overrightarrow{v(t)},~\overrightarrow{\gamma(t)}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le mouvement de M sur sa trajectoire est-il accéléré ou retardé ?

EXERCICE 2

1. En intégrant deux fois par parties calculer

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \text{e}^{-x}\sin x\,\text{d}x$$

(n entier naturel)

2. On pose $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.
Montrer que lorsque n tend vers l'infini, s_n tend vers une limite que l'on calculera.

PROBLÈME

Partie A

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes étant considéré comme un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des réels, on note $\mathcal{B}$ la base de cet espace constituée des complexes 1 et i.
Pour tout nombre réel a, on considère l'application f_a de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f_a(z) = (1 - \text{i}a)z + \text{i}a\overline{z}.$$

Soit F l'ensemble des f_a.

1. Montrer que f_a est linéaire et déterminer sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

2. Montrer que F muni de la loi de composition des applications est un groupe isomorphe au groupe $(\mathbb{R},~+)$. Calculer l'image du nombre complexe z par l'application réciproque f_a^{-1}.

3. Étudier suivant les valeurs de a l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}$ invariants par f_a.
Lorsque $a \neq 0$ définir le noyau et l'image de $f_a - f_0$.

Partie B

P est un plan affine associé au plan vectoriel $\mathbb{C}$ et rapporté à un repère d'origine O et de base $\mathscr{B}$.

1. Pour tout nombre réel m, on considère l'ensemble C_m des points du plan P dont les coordonnées x et y vérifient

$$(1-m)x^2 - my^2 = 4$$

   Étudier la nature de C_m suivant les valeurs de m.
   Construire $C_{\frac{1}{2}}$ dans le repère donné.

2. Soit S l'application affine, de P dans P, qui admet O pour point invariant et $f_{\frac{1}{2}}$ pour endomorphisme associé. La courbe C_m est transformée par S en C'_m.
   Écrire l'équation de C'_m. Vérifier que l'équation de $C'_{\frac{1}{2}}$ est

$$y = \frac{x^2-8}{2x}$$

3. Construire $C'_{\frac{1}{2}}$ sur la même figure que $C_{\frac{1}{2}}$. Rechercher tous les points de $C'_{\frac{1}{2}}$ dont les deux coordonnées appartiennent à $\mathbb{Z}$, ensemble des nombres entiers relatifs.

4. Soit T l'application affine, de P dans P, qui admet O pour point invariant et $f_{\frac{1}{2}} - f_0$ pour endomorphisme associé. Montrer qu'il existe une projection Q_1 sur la droite dirigée par $\overrightarrow{\imath}$ qui passe par O et une projection Q_2 sur une droite qui passe par O, telle que $T = Q_2 \circ Q_1$.
   (On précisera les directions suivant lesquelles s'effectuent les projections Q_1 et et Q_2)