Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat C 1975 Nancy ∾

EXERCICE 1

1. Trouver l'ensemble des entiers naturels qui divisent 276.
2. Trouver les paires d'entiers naturels dont le plus grand diviseur commun d et le plus petit multiple commun m vérifient

$$\begin{cases} m+3d & = & 276 \\ 10 < & d & < 30 \end{cases}$$

EXERCICE 2

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$. On considère les points A, B et O′ ayant pour coordonnées respectivement $(a\,;\,0\,;\,0)$, $(0\,;\,b\,;\,0)$, $(0\,;\,0\,;\,c)$.
Soit C le point tel que $\overrightarrow{\text{AC}} = \overrightarrow{\text{OB}}$ et soit A′, B′, C′ les points définis par $\overrightarrow{\text{AA}'} = \overrightarrow{\text{BB}'} = \overrightarrow{\text{CC}'} = \overrightarrow{\text{OO}'}$.
Soit S_1, S_2 et S_3 les symétries orthogonales ayant pour axes respectivement OA, BB′ et A′C′.

1. La transformation $T = S_3 \circ S_2 \circ S_1$ est-elle un déplacement ou un antidéplacement ?
2. Quelle est l'application linéaire associée à T ?
3. Déterminer la nature géométrique de T.

PROBLÈME

1. On désigne par G l'espace vectoriel réel des applications polynomiall-, de R dans R, de degré au plus égal à 2. On rappelle que G est de dimension 3.
   Soit a un nombre réel tel que $a^2 \neq 1$. On considère les trois applications polynomiales R_a, S_a, T_a définies de la manière suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$R_a(x) = \frac{(x-1)(x-a)}{2(1+a)}, \quad S_a(x) = \frac{x^2-1}{a^2-1}, \quad T_a(x) = \frac{(x+1)(x-a)}{2(1-a)}$$

   a. Calculer les valeurs de R_a, S_a, T_a aux points -1, a, 1 et en déduire que ces trois applications polynomiales sont linéairement indépendantes.
   Constituent-elles une base de $\mathcal{E}$?

   b. Soit α, β et γ des nombres réels. Montrer qu'il existe un et un seul élément P de $\mathcal{E}$ tel que

$$P(-1) = \alpha, \quad P(a) = \beta, \quad P(1) = \gamma$$

   en cherchant à exprimer P à l'aide de R_a, S_a, T_a.

2. **a.** Soit f l'application de $[-1\,;\,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3+x} + \frac{1}{3-x}\right), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

   Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

b. Déterminer l'élément Q_0 de $\mathscr{E}$ qui prend aux points -1, 0, 1 les mêmes valeurs que f et calculer $Q_0(x) - f(x)$ ainsi que $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q_0(x)\,\mathrm{d}x$.

c. On pose $\Delta = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(Q_0(x) - f(x)\right)\,\mathrm{d}x$.

En minorant et majorant $9 - x^2$ lorsque $|x| \leqslant 1$, montrer que

$$\frac{1}{819} \leqslant \Delta \leqslant \frac{1}{720}.$$

d. En déduire un encadrement de Log 2 par des nombres décimaux dont la différence est $16 \cdot 10^{-5}$.

3. On considère à nouveau, lorsque $a^2 \neq 1$, les polynômes R_a, S_a, T_a introduits en 1.

a. Calculer les intégrales

$$\int_{-1}^{1} R_a(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{-1}^{1} S_a(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{-1}^{1} T_a(x)\,\mathrm{d}x$$

b. On suppose que $\left(a^2 - 1\right)\left(a^2 - 9\right) \neq 0$. Soit Q_a l'élément de $\mathscr{E}$ qui prend aux points -1, a, 1 les mêmes valeurs que f. Calculer

$$I(a) = \int_{-1}^{1} Q_a(x)\,\mathrm{d}x.$$

(Il est conseillé de vérifier que pour $a = 0$ on obtient le résultat trouvé en 2. b.

c. Étudier les variations de $I(a)$ lorsque a parcourt l'intervalle $]-1\,;\,1[$.

d. En déduire qu'il existe un nombre a_0 tel que

$$-1 < a_0 < 1 \quad \text{et} \quad I\left(a_0\right) = \mathrm{Log}\,2$$