∽ Baccalauréat C Nancy juin 1977 ∾

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Soit n un entier strictement supérieur à 2. Si p est un entier relatif ($p \in \mathbb{Z}$) nous noterons par $\overline{p}$ la classe de p modulo n $\left(\overline{p} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)$.
On note par S_n l'ensemble des x de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui vérifient $x^2 + \overline{1} = \overline{0}$.

1. **a.** Démontrer que pour chaque $n(n > 2)0, 1$ et?1 ne sont pas dans Sn.
   b. Démontrer que si $x \in S_n$ et si $y \in S_n$ on a alors

$$(x - y)(x + y) = \overline{0}.$$

   c. Démontrer que si $x \in S_n$, alors $-x \in S_n$; montrer que si n est premier, S_n est vide ou a exactement deux éléments.
2. Résoudre l'équation $x^2 + \overline{1} = \overline{0}$ dans chacun des cas suivants : $n = 5$, $n = 7$, $n = 6$, $n = 10$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls; soit f l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 0, \text{ et} \\ f(x) & = & x^2 \ln(x) \text{ si } x > 0. \end{array}\right.$$

1. Étudier f et construire sa représentation graphique dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé; on donne $\dfrac{1}{\sqrt{\text{e}}} \approx 0,61$ et $\dfrac{1}{\text{e}} \approx 0,37$. (On étudiera la dérivabilité de f en 0).
2. Soit g l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \int_1^x f(t)\,\text{d}t, \quad x \geqslant 0.$$

   a. Justifier l'existence de g.
   b. Calculer explicitement $g(x)$ pour $x > 0$.
   c. Calculer $g(0)$; en déduire l'aire de la partie du plan définie par :

$$\left\{0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f(x) \leqslant y \leqslant 0\right\}.$$

PROBLÈME **13 POINTS**

Soit E un espace affine de dimension 3 rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

Partie A

On appelle A, B, C, D les points de E définis respectivement par les triplets de coordonnées suivants :

$$(1\,;\,-1\,;\,0); (2\,;\,0\,;\,1); (-1\,;\,1\,;\,0) \text{ et } (-2\,;\,0\,;\,1).$$

Soit λ et μ des nombres réels; on désigne par P le barycentre des points pondérés (A, $1 + \lambda$) et (B, λ) et par Q le barycentre des points pondérés (C, $1 + \lambda$) et (D, $-\lambda$).
Enfin on appelle G le barycentre des points pondérés $\left(P,\ \dfrac{1 + \mu}{2}\right)$ et $\left(Q,\ \dfrac{1 - \mu}{2}\right)$.

1. **a.** Calculer, en fonction de λ, les coordonnées des points P et Q.
   b. Démontrer que les coordonnées de G sont :
$$(\lambda + \mu\,;\ \lambda - \mu\,;\ \lambda \times \mu).$$
2. **a.** Le réel λ étant supposé fixé, montrer que l'ensemble des points G obtenus quand μ varie est une droite D_λ.
   b. Représenter D_λ par un système d'équations cartésiennes.
3. **a.** Le réel μ étant fixé, montrer que l'ensemble des points G obtenus quand λ varie est une droite D_μ.
   b. Représenter D_μ par un système d'équations cartésiennes.
4. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des points G obtenus quand λ et μ décrivent $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées vérifient
$$x^2 - y^2 = 4z.$$
5. Reconnaître $\mathcal{S}$.

Partie B

1. Déterminer l'intersection de l'ensemble $\mathcal{S}$ défini au A 4. avec chacun des trois plans d'équation $x = 0$, $z = 0$ et $z = 1$.
   Représenter les trois ensembles obtenus sur des figures séparées en rapportant chacun des plans considérés à un repère orthonormé simple.
2. Soit K et K$'$ les points de coordonnées $(0\,;0\,;1)$ et $(0\,;\ 0\,;\ -1)$ respectivement.
   On désigne par L la droite passant par K et de vecteur directeur $\overrightarrow{\jmath}$, et par L' la droite passant par K$'$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{\imath}$.
   Soit M le point de E de coordonnées $(x\,;\ y\,;\ z)$; montrer que la projection orthogonale H de M sur L a pour coordonnées $(0\,;\ y\,;\ 1)$, et que la projection orthogonale H' de M sur L' a pour coordonnées $(x\,;\ 0\,;\ -1)$.
   Montrer que $\mathcal{S}$ est l'ensemble des points M de E situés à égale distance de L et de L'.

Partie C

On désigne par V l'espace vectoriel associé à E. Si φ est un réel vérifiant $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$, on désigne par F_φ l'endomorphisme de V défini par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} F_\varphi\left(\overrightarrow{\imath}\right) & = & (-\cos 2\varphi)\,\overrightarrow{\jmath} + (\sin 2\varphi)\,\overrightarrow{k}\\ F_\varphi\left(\overrightarrow{\jmath}\right) & = & -\,\overrightarrow{\imath}\\ F_\varphi\left(\overrightarrow{k}\right) & = & (-\sin 2\varphi)\,\overrightarrow{\jmath} + (-\cos 2\varphi)\,\overrightarrow{k}\end{array}\right.$$

1. Montrer que F_φ est un endomorphisme orthogonal de V, et montrer que l'ensemble des vecteurs de V invariants par F_φ est la droite vectorielle dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath} + (\tan\varphi)\,\overrightarrow{k}$.
2. Soit f_φ l'application affine de E dans E dont l'endomorphisme associé est F_φ et telle que $f_\varphi(K)$ soit le point K$_1$ de coordonnées $(2\tan\varphi\,;\ 0\,;\ 1)$, où K est le point de coordonnées $(0\,;0\,;1)$.
   a. Définir analytiquement f_φ.
   b. Montrer qu'il existe des points de E invariants par f_φ (on pourra chercher des points invariants dont la première coordonnée est nulle). En déduire que f_φ est une rotation dont on déterminera l'axe δ_φ.

c. Montrer que δ_φ est inclus dans $\mathscr{S}$ et que $f_\varphi(L) = L'$ où L et L' sont les droites que l'on a définies au B 2.

Partie D

Soit r une rotation (affine) telle $r(L) = L'$. On désigne par δ l'axe de r, et par R la rotation vectorielle associée à r.
Montrer que l'on a $R\left(\overrightarrow{\jmath}\right) = \overrightarrow{\imath}$ ou $R\left(\overrightarrow{\jmath}\right) = -\overrightarrow{\imath}$
Montrer que la droite δ est contenue dans $\mathscr{S}$.