Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Nancy-Metz juin 1972 ∾

EXERCICE 1

Trouver tous les couples $(a,\ b)$ d'entiers naturels tels que $5a - 2b = 357$ et dont le P.G.C.D. est égal à 119.

EXERCICE 2

Dans un plan vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on donne les vecteurs $\vec{u} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = \sqrt{2}\,\vec{\imath} + \alpha\vec{\jmath}$, où α est un nombre réel positif.

1. Comment faut-il choisir α pour qu'il existe une rotation vectorielle r telle que $r\left(\vec{u}\right) = \vec{v}$?

   Déterminer alors la matrice de r dans la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ et l'angle de r.
2. Soit $\vec{w} = -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$. Montrer qu'il existe une isométrie vectorielle négative, s, et une seule, telle que $\vec{w} = (s \circ r)\left(\vec{u}\right)$.

   Déterminer la matrice de s dans la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

PROBLÈME

Pour tout nombre réel, α, strictement positif, on désigne par f_α la fonction numérique, de variable réelle, définie par la relation

$$f_\alpha(x) = \frac{\text{Log}\,(\alpha x)}{x}$$

et par (C_α) la courbe représentative de f_α dans un repère orthonormé.

Partie A

1. Étudier les variations de f_1 et construire (C_1).
   Plus généralement, étudier les variations de f_α préciser les asymptotes à la courbe (C_α) et déterminer son intersection avec l'axe $x'\text{O}x$.
2. Calculer en fonction de α l'aire du domaine limité par l'axe $x'\text{O}x$ et la courbe (C_α) et dont les points ont une abscisse inférieure à $\dfrac{e}{\alpha}$.

Partie B

1. Soit a un nombre réel strictement positif.
   Déterminer, suivant les valeurs de a, le nombre de solutions de l'équation

$$a^x = x \quad \text{avec } x \in R.$$

   (On pourra utiliser les variations de f_1.)

2. En utilisant de même les variations de f_1, montrer qu'il existe un couple $(b,\ c)$, et un seul, d'entiers naturels non nuls tels que

$$b^c = c^b \quad \text{avec } b < c.$$

Déterminer ce couple.

Partie C

1. Soit α et β deux nombres réels strictement positifs distincts et λ un nombre réel différent de 1. Pour tout nombre réel x strictement positif, on note M_1 et M_2 les points des courbes $\left(C_{\alpha_1}\right)$ et $\left(C_{\alpha_2}\right)$ admettant x pour abscisse et l'on désigne par M le barycentre des points M_1 et M_2 affectés respectivement des coefficients 1 et $-\lambda$.

   Démontrer que l'ensemble décrit par M lorsque x parcourt $]0~;~+\infty[$ est l'une des courbes (C_α).
2. Soit t un nombre réel strictement positif. Écrire l'équation de la tangente (T_α) à la courbe (C_α) au point d'abscisse t.

   Démontrer que, lorsque α varie, t restant fixe, les droites (T_α) passent par un point fixe, I_t. Déterminer l'ensemble, (H), des points I_t, quand t parcourt $]0~;~+\infty[$, et construire (H).