Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C juin 1982 Nancy-Metz ∾

EXERCICE 1 **4 points**

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

$$17q - 11p = 2.$$

2. On désigne par $\overline{n}$ la classe d'équivalence modulo 187 de l'entier $n \in \mathbb{Z}$.
Résoudre dans $\mathbb{Z}/187\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - \overline{1} = 0$.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - [(1+2\text{i})u + 1]z + (-1+z)u^2 + \text{i}u = 0$$

oô z est l'inconnue complexe et u un paramètre complexe.
On appellera z' la racine qui est un polynôme du premier degré en u et dont le coefficient de u est $(1+\text{i})$, z'' l'autre racine.

2. Dans le plan affine euclidien, on appelle P le point d'affixe u, M' celui d'affixe z', M'' celui d'affixe z''.
Par quelles transformations du plan passe-t-on de P à M' ? (On appellera T_1 cette transformation et on explicitera ses éléments géométriques). Puis de P à M'' ? (On appellera T_2 cette transformation et on explicitera ses éléments géométriques.)

3. Par quelle transformation T passe-t-on alors de M' à M'' ?
Donner les éléments caractérisant T.

PROBLÈME **12 points**

Partie A

On considère la fonction numérique de la variable réelle f définie par

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f.
2. Déterminer une fonction polynôme P, de degré inférieur ou égal à 3, qui a même valeur et même nombre dérivé que f en 0 et 1.
3. Soit k la fonction numérique définie par

$$k(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x - 1.$$

Factoriser k et en déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_\text{P}$ courbes représentatives respectives de f et P dans un même repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ orthonormé du plan. Tracer soigneusement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_\text{P}$. Faire figurer les tangentes aux points communs.

4. À l'aide d'un encadrement de $1+x$ pour $x \in [0~;~1]$, montrer que

$$\frac{1}{240} < \int_0^1 k(x)\,\mathrm{d}x < \frac{1}{120}.$$

5. Calculer $\displaystyle\int_0^1 k(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(x)\,\mathrm{d}x$.
6. Déduire des résultats précédents la valeur de $n \in \mathbb{N}$ telle que

$$\frac{n}{240} < \mathrm{Log}\,2 < \frac{n+1}{240}.$$

Partie B

On désigne par E l'espace vectoriel sur constitué par la fonction nulle et les fonctions polynômes, à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3.
Soit h un réel strictement positif et φ l'application de E vers $\mathbb{R}^4$ telle que

$$\varphi(\mathrm{P}) = (\mathrm{P}(0),~\mathrm{P}'(0),~\mathrm{P}(h),~\mathrm{P}'(h).$$

1. Quelle est la dimension de E ? Montrer que φ est une application linéaire bijective de E sur $\mathbb{R}^4$.
2. Soit φ^{-1}, la bijection réciproque de φ. Déterminer $\mathrm{P}_3 = \varphi^{-1}((0,~0,~1,~0))$ et $\mathrm{P}_4 = \varphi^{-1}((0,~0,~0,~1))$.
3. Soit $\mathrm{P}_1 = 1 - \mathrm{P}_3$, et P_2 défini par $\mathrm{P}_2(X) = -\mathrm{P}_4(h-x)$.
   Vérifier que $\mathrm{P}_1 = \varphi^{-1}((1,~0,~0,~0))$ et $\mathrm{P}_2 = \varphi^{-1}((0,~1,~0,~0))$.
4. Calculer pour i élément de $\{1,~2,~3,~4\}$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^h \mathrm{P}_i(t)\,\mathrm{d}t$.
5. Montrer que tout élément P de E s'écrit comme une combinaison linéaire de P_1, P_2, P_3 et P_4.
   En déduire la relation, pour P élément de E,

$$\int_0^h \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{h}{2}(\mathrm{P}(0)+\mathrm{P}(h)) + \frac{h^2}{12}\left(\mathrm{P}'(0)-\mathrm{P}'(h)\right).$$

Partie C

Soit a un réel strictement positif et g une application de $[0~;~a]$ vers $\mathbb{R}$ possédant des dérivées continues au moins jusqu'à l'ordre 4 sur $[0~;~a]$. Soit $h \in]0~;~a]$, et Q_h l'élément de E ayant même valeur et même nombre dérivé que g en 0 et h.

1. Montrer que g est intégrable sur $[0~;~h]$ et, en utilisant les résultats de la partie B, qu'on a la relation

$$\int_0^h g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^h \mathrm{Q}_h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^h g(t)\,\mathrm{d}t - \frac{h}{2}(g(0)+g(h)) - \frac{h^2}{12}\left(g'(0)-g'(h)\right).$$

2. Pour tout u de $[0~;~a]$, on pose

$$\Psi(u) = \int_0^u g(t)\,\mathrm{d}t - \frac{u}{2}(g(0)+g(u)) - \frac{u^2}{12}\left(g'(0)-g'(u)\right).$$

   Montrer que l'application Ψ ainsi définie est dérivable au moins jusqu'à l'ordre 3 sur $[0~;~a]$, que

$$\Psi(0) = \Psi'(0) = \Psi''(0) = 0$$

$$\text{et que } (\forall u \in [0~;~a]), \quad \left(\Psi^{(3)}(u) = \frac{u^2}{12}g^{(4)}(u)\right).$$

3. On pose $\mathrm{M} = \sup_{t\in[0\,;a]}\left|g^{(4)}(t)\right|$.
Montrer successivement que

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0\,;\ a], &\quad \left|\Psi''(x)\right| \leqslant \mathrm{M}\frac{x^3}{36},\\
\forall y \in [0\,;\ a], &\quad \left|\Psi'(y)\right| \leqslant \mathrm{M}\frac{y^4}{144},\\
\forall z \in [0\,;\ a], &\quad |\Psi(z)| \leqslant \mathrm{M}\frac{z^5}{720}.
\end{aligned}$$

4. Montrer en utilisant les questions précédentes que

$$\int_0^a g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a}{2}(g(0)+g(a)) + \frac{a^2}{12}(g'(0)-g'(a)) + \mathbb{R},$$

avec $\mathbb{R} \leqslant \dfrac{a^5}{720}\mathrm{M}$.