

∞ Baccalauréat C Nancy juin 1966 ∞
Mathématiques et mathématiques et technique

EXERCICE 1

1. Trouver le module et l'argument du nombre complexe

$$z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}.$$

2. Soit θ un nombre réel tel que $0 \leq \theta < 2\pi$.

Trouver le module et l'argument du nombre complexe

$$\omega = \sin 2\theta + 2i \sin \theta.$$

EXERCICE 1

Le plan est rapporté à un système d'axes orthonormé Ox, Oy . On donne un nombre réel $a > 0$. Soit k un nombre réel. On désigne par (T_k) la transformation ponctuelle dans laquelle le point M de coordonnées $(x; y)$ a pour image le point M' de coordonnées $(x'; y')$ définies par les formules

$$x' = \frac{ax}{(1-k)x + ak} \quad \text{et} \quad y' = \frac{ay}{(1-k)x + ak}.$$

1.
 - a. Quelle est cette transformation pour $k = 1$?
On suppose désormais $k \neq 1$.
 - b. Quels sont les points M qui n'ont pas de transformé?
On suppose désormais que M n'est pas l'un de ces points.
 - c. Montrer que la droite MM' passe par O .
 - d. Déterminer l'ensemble des points M qui coïncident avec leur transformé.
 - e. Montrer que, pour que la transformation (T_k) soit involutive, il faut et il suffit que $k = -1$.
2. Dans toute cette partie, on suppose que $k = -1$.
 - a. Soit P le conjugué harmonique de O par rapport au segment MM' .
Quand M varie, quel est l'ensemble des points P ?
 - b. En déduire une construction de M' , connaissant M .
 - c. Quelle est l'enveloppe de la polaire de O par rapport au cercle de diamètre MM' , quand M varie?
 - d. Étudier le transformé du cercle d'équation

$$x^2 + y^2 = 1.$$

On discutera, selon les valeurs de a , la nature de la courbe obtenue.

Parmi ces courbes se trouve une parabole, dont on précisera le foyer et la directrice.

- e. Soit A le point de Ox d'abscisse $\frac{2a}{3}$. Déterminer son transformé, B , et le transformé du cercle de diamètre AB .
3.
 - a. Étudier la transformation pour $k = 0$.
 - b. Pour quelles valeurs de k la transformation (T_k) est-elle égale au produit de (T_k) par (T_k) ?