

∞ Baccalauréat C Nancy juin 1966 ∞  
**Mathématiques et mathématiques et technique**

**EXERCICE 1**

1. Trouver le module et l'argument du nombre complexe

$$z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}.$$

2. Soit  $\theta$  un nombre réel tel que  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

Trouver le module et l'argument du nombre complexe

$$\omega = \sin 2\theta + 2i \sin \theta.$$

**EXERCICE 1**

Le plan est rapporté à un système d'axes orthonormé  $Ox, Oy$ . On donne un nombre réel  $a > 0$ . Soit  $k$  un nombre réel. On désigne par  $(T_k)$  la transformation ponctuelle dans laquelle le point  $M$  de coordonnées  $(x; y)$  a pour image le point  $M'$  de coordonnées  $(x'; y')$  définies par les formules

$$x' = \frac{ax}{(1-k)x + ak} \quad \text{et} \quad y' = \frac{ay}{(1-k)x + ak}.$$

1.
  - a. Quelle est cette transformation pour  $k = 1$ ?  
On suppose désormais  $k \neq 1$ .
  - b. Quels sont les points  $M$  qui n'ont pas de transformé?  
On suppose désormais que  $M$  n'est pas l'un de ces points.
  - c. Montrer que la droite  $MM'$  passe par  $O$ .
  - d. Déterminer l'ensemble des points  $M$  qui coïncident avec leur transformé.
  - e. Montrer que, pour que la transformation  $(T_k)$  soit involutive, il faut et il suffit que  $k = -1$ .
2. Dans toute cette partie, on suppose que  $k = -1$ .
  - a. Soit  $P$  le conjugué harmonique de  $O$  par rapport au segment  $MM'$ .  
Quand  $M$  varie, quel est l'ensemble des points  $P$ ?
  - b. En déduire une construction de  $M'$ , connaissant  $M$ .
  - c. Quelle est l'enveloppe de la polaire de  $O$  par rapport au cercle de diamètre  $MM'$ , quand  $M$  varie?
  - d. Étudier le transformé du cercle d'équation

$$x^2 + y^2 = 1.$$

On discutera, selon les valeurs de  $a$ , la nature de la courbe obtenue.

Parmi ces courbes se trouve une parabole, dont on précisera le foyer et la directrice.

- e. Soit  $A$  le point de  $Ox$  d'abscisse  $\frac{2a}{3}$ . Déterminer son transformé,  $B$ , et le transformé du cercle de diamètre  $[AB]$ .
3.
  - a. Étudier la transformation pour  $k = 0$ .
  - b. Pour quelles valeurs de  $k$  la transformation  $(T_k)$  est-elle égale au produit de  $(T_k)$  par  $(T_k)$ ?