Baccalauréat Nancy septembre 1965
série mathématiques et technique

I.

Calculer le module et l'argument du nombre complexe $a = \sqrt{3} + \mathrm{i}$, puis le module et l'argument du nombre complexe $b = a^4$.
Déterminer les racines quatrièmes de b.
Indiquer la disposition de leurs images géométriques dans le plan.

II.
On rapporte le plan à un système d'axes orthonormé $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$.
On donne un nombre réel $R > 0$.
Soit (O) le cercle de centre O et de rayon R et soit (D) la droite d'équation $x = 2R$. Soit E l'ensemble des cercles (C) tangents à (D) et orthogonaux à (O).

1. Pour qu'un cercle dont le rayon est r et dont le centre a pour coordonnées $(a\ ;\ b)$ soit dans l'ensemble E il faut et il suffit que a, b et r satisfassent à des relations qu'on écrira.
2. Écrire l'équation de la courbe (L), lieu des centres des cercles de l'ensemble E.
   Préciser la nature et les éléments de la courbe obtenue.
3. On donne un nombre réel $r > 0$.
   À quelle condition sur r y a-t-il dans E des cercles dont le rayon vaut r ?
   Discuter alors leur nombre et calculer en fonction de r les coordonnées $(a\ ;\ b)$ de leur centre, C.
   Indiquer pour C une construction à la règle et au compas.
4. Soit b un nombre réel donné. Déterminer l'abscisse du centre, C, et le rayon du cercle de l'ensemble E qui touche (D) au point d'ordonnée b. Indiquer une construction géométrique de C.
5. Soit I le point d'abscisse $-R$, d'ordonnée nulle.
   Quelle est la puissance de l'inversion de pôle I qui transforme (O) en (D) ?
   Quel est l'ensemble E$'$ des cercles (C$'$), transformés, dans cette inversion, des cercles (C) de l'ensemble E ?
   Montrer que les cercles (C$'$) sont tous tangents à deux cercles fixes. En déduire que les cercles de l'ensemble E sont tangents à un cercle fixe et retrouver géométriquement la courbe (L) déterminée par le calcul au **2.**