∽ Baccalauréat Nancy septembre 1966 ∾
série mathématiques élémentaires

I.

On suppose que $0 < \varphi < \pi$ et $0 < \varphi' < \pi$.
On pose

$$z = \cos 2\varphi + \mathrm{i}\sin 2\varphi \quad \text{et} \quad z' = \cos 2\varphi' + \mathrm{i}\sin 2\varphi'.$$

Calculer le module et l'argument du nombre complexe

$$w = \frac{1-z}{1-z'}.$$

II.

Sur un axe Ox d'origine O, soit I le point d'abscisse 3.
À tout point M de Ox, d'abscisse x, distinct de I, on fait correspondre le point M$'$ de Ox, d'abscisse x' donnée par la formule

$$z' = \frac{2x-4}{x-3}.$$

1. **a.** Quelles sont les abscisses des deux points, A et B, de Ox qui coïncident avec leur transformé ?

   b. Quelle est la position limite, J, de M$'$, quand il s'éloigne indéfiniment sur Ox?

   c. Montrer que $\overline{\text{IM}} \cdot \overline{\text{JM}'}$ garde une valeur constante.

   d. Ω désigne le milieu de IJ. On pose $\text{X}' = \overline{\Omega\text{M}'}$.
   Trouver la relation entre X et X$'$.

2. Soit M tel que M et son transformé, M$'$, soient conjugués harmoniques par rapport à I et J.
   Quelles sont alors les valeurs de XX$'$ et X $-$X$'$?
   En déduire les positions de M correspondantes.

3. On définit un repère orthonormé Ωx, ΩY à l'aide de la perpendiculaire ΩY tracée à Ox par le point O.
   Sur ΩY, soit C le point d'ordonnée $\dfrac{3}{2}$.
   On appelle θ l'angle orienté de droites (CM, CM$'$).

   a. Calculer tg θ en fonction de X et X$'$.

   b. En déduire une relation entre tg θ et le nombre $\overline{\text{MM}'}$.

4. Soit (C) le cercle de diamètre AB. Soit S l'intersection avec (C) du demi-axe parallèle à ΩY, mené par I.
   Soit T le point diamétralement oppose à S sur (C).

   a. Prouver la similitude des triangles IMS et JTM$'$.

   b. Montrer que les droites SM t TM$'$ se coupent sur (C).
   En déduire une construction de M, connaissant M.

5. On considère le point M'_1 tel que $\overline{\text{M}'\text{M}'_1} = 1$.
   Calculer $\overline{\text{IM}} \cdot \overline{\text{IM}'_1}$.
   En déduire une nouvelle construction de M$'$ connaissant M.