

🌀 Baccalauréat Nancy septembre 1966 🌀
série mathématiques élémentaires

I.

On suppose que $0 < \varphi < \pi$ et $0 < \varphi' < \pi$.

On pose

$$z = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi \quad \text{et} \quad z' = \cos 2\varphi' + i \sin 2\varphi'.$$

Calculer le module et l'argument du nombre complexe

$$w = \frac{1 - z}{1 - z'}.$$

II.

Sur un axe Ox d'origine O , soit I le point d'abscisse 3.

À tout point M de Ox , d'abscisse x , distinct de I , on fait correspondre le point M' de Ox , d'abscisse x' donnée par la formule

$$z' = \frac{2x - 4}{x - 3}.$$

1.
 - a. Quelles sont les abscisses des deux points, A et B , de Ox qui coïncident avec leur transformé?
 - b. Quelle est la position limite, J , de M' , quand il s'éloigne indéfiniment sur Ox ?
 - c. Montrer que $\overline{IM} \cdot \overline{JM'}$ garde une valeur constante.
 - d. Ω désigne le milieu de IJ . On pose $X' = \overline{\Omega M'}$.
Trouver la relation entre X et X' .
2. Soit M tel que M et son transformé, M' , soient conjugués harmoniques par rapport à I et J .
Quelles sont alors les valeurs de XX' et $X - X'$?
En déduire les positions de M correspondantes.
3. On définit un repère orthonormé $\Omega x, \Omega y$ à l'aide de la perpendiculaire ΩY tracée à Ox par le point O .
Sur ΩY , soit C le point d'ordonnée $\frac{3}{2}$.
On appelle θ l'angle orienté de droites (CM, CM') .
 - a. Calculer $\operatorname{tg} \theta$ en fonction de X et X' .
 - b. En déduire une relation entre $\operatorname{tg} \theta$ et le nombre $\overline{MM'}$.
4. Soit (C) le cercle de diamètre AB . Soit S l'intersection avec (C) du demi-axe parallèle à ΩY , mené par I .
Soit T le point diamétralement opposé à S sur (C) .
 - a. Prouver la similitude des triangles IMS et JTM' .

b. Montrer que les droites SM et TM' se coupent sur (C) .

En déduire une construction de M , connaissant M' .

5. On considère le point M'_1 tel que $\overline{M'M'_1} = 1$.

Calculer $\overline{IM} \cdot \overline{IM'_1}$.

En déduire une nouvelle construction de M' connaissant M .