∽ Baccalauréat Nancy septembre 1967 ∾
Mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

I.

Trouver les nombres complexes $z = x + \text{i}y$ tels que z^2 soit égal au nombre complexe $6 + \dfrac{5}{2}\text{i}$.

II.

Résoudre l'équation en x suivante :

$$2,437\cos x - 3,742\sin x = 4,153.$$

On utilisera une table de logarithmes ; on évaluera x en degrés ou en grades, selon cette table, avec la précision qu'elle comporte.

III.

Soit (H) la courbe d'équation

$$y^2 = x^2 - 4x + 3$$

dans un repère orthonormé Ox, Oy.

1. Montrer que (H) est un hyperbole.
   Indiquer les coordonnées de son centre et de ses sommets, ainsi que l'équation de chacune de ses asymptotes.
2. Soit (D_m) la droite d'équation $y = mx$.
   Former l'équation dont les racines sont les abscisses des points d'intersection de (D_m) et de (H).
   Montrer que, en général, il y a deux tels points d'intersection, P_1 et P_2 ; indiquer les cas d'exception.
3. Calculer en fonction de m les coordonnées, X et Y, du milieu, P, de P_1P_2, puis calculer y^2 en fonction de X.
   En déduire quelle est la courbe décrite par P, quand m varie.
4. À tout point M du plan, de coordonnées $(x~;~y)$, non situé sur la droite $x = 1$, on fait correspondre le point M$'$, dont les coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$ sont données par les formules

$$x' = \dfrac{x}{1-x} \quad \text{et} \quad y' = \dfrac{y}{1-x}.$$

   a. Calculer, réciproquement, x et y en fonction de x' et y'.
   b. Quel est l'ensemble (C) décrit par M$'$, quand M parcourt (H) ?
   c. Quelle est la partie de (C) décrite par M$'$ quand M parcourt celle des branches de (H) qui contient le point de Ox qui a pour abscisse 3 ?
   d. Les transformées (Δ_a) des droites $y = a$ sont des droites qui, lorsque a varie, passent par un point fixe, F, que l'on déterminera.
   e. Déterminer la nature et représenter le graphique de la courbe transformée du cercle de centre O et de rayon $\dfrac{1}{2}$.