Baccalauréat C Nantes juin 1980

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Si p et q sont deux éléments de $\mathbb{Z}^\star$ le plus grand commun diviseur de ces deux nombres sera noté $p \wedge q$.

1. **a.** Déterminer l'ensemble des éléments x de $\mathbb{Z}$ qui vérifient :

$$3x \equiv 23 \quad [7].$$

b. En déduire l'ensemble des couples $(x,\ y)$ de $\mathbb{Z}^2$ qui vérifient :

$$3x - 7y = 23 \qquad (1)$$

2. **a.** Soit k un élément de $\mathbb{Z}$, $k \neq 7$. Démontrer l'égalité

$$(3+7k) \wedge (-2+3k) = (k+7) \wedge 23.$$

b. En déduire l'ensemble des couples $(x,\ y)$ de $\left(\mathbb{Z}^\star\right)^2$ vérifiant (1) et tels que

$$x \wedge y \neq 1.$$

EXERCICE 2 **5 POINTS**

1. Soit g l'application de $\mathbb{R}^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = 2 - x + \ln|x|.$$

a. Étudier les variations de g et ses limites aux bornes de $\mathbb{R}^\star$.

b. Démontrer qu'il existe trois nombres réels α_1, α_2, α_3, qu'on ne cherchera pas à calculer, tels que :

$$\alpha_1 < 0 < \alpha_2 < 1 < \alpha_3$$

$$g(\alpha_1) = g(\alpha_2) = g(\alpha_3) = 0.$$

2. Soit f l'application de $\mathbb{R} - \{0\ ;\ 1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x(1+\ln|x|)}{1-x}.$$

Calculer la fonction dérivée f'. Déduire de la première question l'étude du signe de $f'(x)$.

3. Soit F l'application de $\mathbb{R} - \{1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} F(x) & = & f(x) \quad \text{si } x \neq 0 \\ F(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

a. F est-elle continue en $x = 0$? Est-elle dérivable en ce point ?

b. Étudier les variations de F.

c. On considère un plan affine rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ ($\overrightarrow{\imath}$ dirigeant l'axe des abscisses, unité 3 centimètres).
Donner l'allure de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de F dans ce plan. Déterminer les points d'intersection, autres que O, de $\mathscr{C}$ avec la droite d'équation $y = -x$.

PROBLÈME **12 POINTS**

Soient P un plan vectoriel euclidien, rapporté à une base orthonormée $\mathscr{B} = \left(\vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$, $\mathscr{P}$ un plan affine associé à P, O un point de $\mathscr{P}$; on note $\mathscr{R}$ le repère (O ; $\mathscr{B}$) de $\mathscr{P}$.
Pour les représentations graphiques dans $\mathscr{P}$ on prendra deux centimètres pour unité de longueur. On désigne par L(P) l'ensemble des endomorphismes de P. On rappelle que $\mathscr{L}(P)$ a une structure d'espace vectoriel et que, muni de l'addition et de la composition des applications, notées respectivement + et $\circ$, cet ensemble a aussi une structure d'anneau unitaire.
On désigne respectivement par e et ' l'application identique et l'application nulle de $\mathscr{L}(P)$. Si f est un élément de $\mathscr{L}(P)$ et si n est un entier naturel, on note f^n l'élément de $\mathscr{L}(P)$ défini par les relations

$$f^0 = \mathrm{e},\quad f^1 = f,\quad f^n = f \circ f^{n-1}\quad \text{si } n > 1.$$

Partie A

On se propose d'étudier les endomorphismes f de $\mathscr{L}(P)$ vérifiant la relation

$$f^2 + \frac{1}{2}f - \frac{5}{18}e = \omega. \qquad (1)$$

1. Soit g l'endomorphisme de P dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{7}{12} \\ -\dfrac{7}{12} & -\dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$$

   Vérifier que g est solution de (1).

2. **a.** Déterminer les deux homothéties vectorielles solutions de (1). On appelle k_1 et k_2 leurs deux rapports avec $k_1 < k_2$.

   b. Démontrer que la relation (1) est équivalente à la relation

$$\left(f - k_1\mathrm{e}\right) \circ \left(f - k_2\mathrm{e}\right) = \omega. \qquad (2)$$

3. Soit f l'endomorphisme de P, autre qu'une homothétie vectorielle, vérifiant (1). On note de la manière suivante deux noyaux et deux images :

$$N_1 = \ker\left(f - k_1\mathrm{e}\right),\ N_2 = \ker\left(f - k_2\mathrm{e}\right),\ I_1 = \mathrm{Im}\left(f - k_1\mathrm{e}\right),\ I_2 = \mathrm{Im}\left(f - k_2\mathrm{e}\right).$$

   a. Démontrer que $I_2 = N_1$ et $I_1 = N_2$. En déduire que N_1 et N_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de P.

   b. Soient p_1 la projection vectorielle de P sur N_1 de direction N_2 et $p_2 = \mathrm{e} - p_1$.
   Démontrer le relation :

$$f = k_1 p_1 + k_2 p_2.$$

   En déduire, pour n entier naturel, une expression de f^n combinaison linéaire de p_1 et p_2.

4. On désigne par π le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(P)$ engendré par p_1 et p_2 de la question précédente.

   a. Quelle est la dimension de π ?

b. Démontrer que $(\pi, +, \circ)$ est un anneau unitaire. Préciser l'élément neutre de cet anneau.

c. Déterminer les solutions de (1) dans π, autres que f.

5. On suppose désormais que f est l'endomorphisme g définie à la première question.

a. Déterminer N_1 et N_2. Donner une base de chacun de ces espaces vectoriels.

b. Vérifier que p_1 et p_2 sont des projections orthogonales. En déduire que :

$$\forall x,\ x \in \text{P},\quad \|x\|^2 2 = \left\| p_1(x) \right\|^2 + \left\| p_2(x) \right\|^2.$$

c. Démontrer qu'un élément $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ de π est une isométrie si et seulement si $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$.

En déduire que l'ensemble des applications de π qui sont des isométries est un groupe dont on précisera les éléments.

Partie B

Soit γ l'application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ dont l'endomorphisme associé est l'application g du A 1. et telle que $\gamma(\text{O}) = \text{O}_1$, O_1 étant le point d'abscisse $\dfrac{7}{3}$ et d'ordonnée 5 dans $\mathscr{R}$.

1. Démontrer que γ admet un point invariant unique A dont on donnera les coordonnées dans $\mathscr{R}$.

2. **a.** Démontrer qu'il y a exactement deux droites de $\mathscr{P}$ passant par A, globalement invariantes par γ. Représenter graphiquement ces droites dans $\mathscr{P}$ muni de $\mathscr{R}$.

b. Démontrer que ce sont les seules droites de $\mathscr{P}$ globalement invariantes par γ.

3. Soit $\mathscr{R}'$ le repère $\left(\text{A}\,;\ \overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2}\right)$ où $\overrightarrow{u_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}\right)$ dirige l'axe des abscisses et $\overrightarrow{u_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(-\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}\right)$ celui des ordonnées.

Soit M_0 un point de $\mathscr{P}$. Si n est un entier naturel non nul, on pose $M_1 = \gamma\left(M_0\right), \cdots, M_n = \gamma\left(M_{n-1}\right)$.

a. Montrer que l'on peut écrire

$$\overrightarrow{\text{A}M_n} = k_2^n p_1 \overrightarrow{\text{A}M_0} + k_1^n p_2 \overrightarrow{\text{A}M_0}.$$

En déduire que

$$\left\|\overrightarrow{\text{A}M_n}\right\| \leqslant \left(|k_1|^n + |k_2|^n\right)\left\|\overrightarrow{\text{A}M_0}\right\|.$$

Que peut-on en déduire pour la suite des points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

b. Déterminer le réel strictement positif α tel que la courbe C du plan $\mathscr{P}$, représentant dans $\mathscr{R}'$ la fonction de $\mathbb{R}^\star$ dans $\mathbb{R}$, $x \longmapsto |x|^\alpha$ soit globalement invariante par γ.

c. Démontrer que si $M_0 \in$ C, on a :

$$\forall n,\quad n \in \mathbb{N},\quad M_n \in \text{C}.$$

d. Soit Γ le cercle de $\mathscr{P}$ de centre A et de rayon 4. Déterminer une équation de $\gamma(\Gamma)$ dans $\mathscr{R}'$. Quelle est la nature de cette courbe ? Préciser ses sommets.

Représenter graphiquement Γ et $\gamma(\Gamma)$ sur le dessin de la question B 2. a.