∾ Baccalauréat C Nantes septembre 1970 ∾

EXERCICE 1

EXERCICE 1

1. Déterminer le module et l'argument du nombre complexe

$$z = \frac{1}{\mathrm{i} + \operatorname{tg} \alpha}$$

α est un nombre réel différent de $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2. Quel est, dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe z lorsque α varie ?

En déduire une construction simple du point A image de

$$z_0 = \frac{1}{\mathrm{i} + \operatorname{tg} \dfrac{7\pi}{8}}.$$

EXERCICE 2

On considère la suite numérique déterminée par $u_1 = 1$ et par la formule de récurrence

$$u_n = \mathrm{e}^{a} \,.\, u_{n-1} + b\ ;$$

a et b sont des réels $(b \neq 0)$; n est un entier naturel non nul ; e est la base des logarithmes népériens.

1. Pour quelles valeurs de a et de b la suite est-elle une suite arithmétique ; une suite géométrique ?

Calculer dans chacun des cas qui viennent d'être rencontrés la somme S_n des n premiers termes et la limite de S_n quand n augmente indéfiniment.

2. Les valeurs particulières de a et de b obtenues à la question précédente étant exclues, on considère la suite définie, pour tout entier naturel non nul n, par

$$v_n = u_n - \frac{b}{1 - \mathrm{e}^{a}}.$$

Démontrer que cette suite est une suite géométrique.

Calculer v_n, puis u_n.

EXERCICE 3

Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'axes Ox et Oy, on considère deux cercles égaux (C) et (C'), de rayon R, tangents en O au support de Oy. (C) est le cercle situé dans le demi-plan des x positifs. À tout point M du plan, on associe le point M', quand il existe, intersection des polaires de M par rapport aux deux cercles. On définit ainsi une transformation ponctuelle plane T.

1. Traiter, sans calculer les coordonnées de M' en fonction de celles de M, les questions suivantes :

a. Quels sont les points sans transformé ?

b. Dans l'ensemble des points du plan, où la transformation T est définie, est-elle bijective ?

c. Reprendre la question précédente dans le plan privé des supports des axes. La transformation Test-elle involutive ?

d. Que peut-on dire du cercle de diamètre MM' ?

En déduire que le milieu du segment MM' appartient au support de Oy.

e. Quelle est la figure transformée par T d'une droite passant par O ?

2. **a.** Calculer les coordonnées x' et y' de M' en fonction des coordonnées x et y de M.

b. Déterminer, pour chaque valeur de u (nombre réel) l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{MM'}$ soit parallèle au vecteur $\overrightarrow{V}$ de coordonnées $(+1\ ;\ u)$; démontrer que cet ensemble est composé de droites passant par O.

c. Les points m et m' étant les projections orthogonales de M et de M' sur le support de Oy, donner pour chaque valeur de k, nombre réel, l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overline{mm'} = k$.

d. Établir pour tout m la relation $MM' \cdot \text{O}m = \text{O}M^2$.

3. Un point M décrit la droite (D) d'équation $y = 2R$.

Ses polaires par rapport à (C) et à (C') coupent (D) respectivement en P et en P'.

Calculer, en fonction de x, abscisse de M, et de R, la longueur ℓ du segment PP' et étudier ses variations en fonction de x quand M décrit (D).

Tracer la représentation graphique de cette fonction ; on précisera la forme de la courbe obtenue au voisinage des points pour lesquels ℓ est nulle.

N. B. - Il n'est pas nécessaire d'avoir traité une question pour traiter la suivante.