Durée : 4 heures

Baccalauréat C Nantes juin 1970

EXERCICE 1

Étudier les variations de la fonction f de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + 2}{1 - 3\mathrm{e}^x}$$

Démontrer que, relativement à un repère quelconque, la représentation graphique admet un centre de symétrie.

EXERCICE 2

Résoudre dans $\mathbb{Z}$, ensemble des entiers relatifs, l'équation

$$x^2 - 3x + 4 \equiv 0 \pmod 7,$$

où x est l'inconnue.

EXERCICE 3

Dans le plan complexe, on considère la transformation T qui, à tout point M, d'affixe z non nulle, fait correspondre le point M', d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{h^2 - z^2}{2z},$$

où h est un nombre complexe constant non nul. On note $M' = T(M)$.

1. Étudier l'ensemble des points invariants par la transformation T et construire ces points.
2. M' étant un point donné du plan, démontrer que l'ensemble des points M tels que $T(M) = M'$ contient, en général, deux points, M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2. Calculer $z_1 \times z_2$ et constater que ce produit est constant.
   En déduire que M_2 est le transformé de M_1 par une transformation, P, qui est la composée de trois transformations ponctuelles : une symétrie axiale, $\sum$, une inversion, I, et une similitude, S ; on écrira ce résultat sous la forme symbolique $P = S \circ I \circ \sum$.
   Démontrer que l'ensemble des points M^r tels que M_1 et M_2 sont confondus contient deux points A'_1 et A'_2. Quels sont les points A'_1 et A'_2 d'affixes respectives a_1 et a_2, tels que

$$A'_1 = T(A_1) \quad \text{et} \quad A'_2 = T(A_2)?$$

3. On pose

$$u = \frac{z - a_1}{z - a_2} \quad \text{et} \quad u' = \frac{z' - a'_1}{z' - a'_2}$$

où a'_1 et a'_2 sont les affixes respectives de A'_1 et A'_2.
Calculer u' en fonction de u.

4. Étudier l'ensemble des points M' dans chacun des cas suivants :

a. M décrit la médiatrice du segment $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$;

b. M décrit la droite $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$;

c. M décrit un cercle passant par A_1 et A_2.