∽ Baccalauréat C Nantes juin 1971 ∾

EXERCICE 1

Le symbole Log u désigne le logarithme népérien de u.

1. On considère la fonction f qui, au nombre réel x, fait correspondre le nombre réel

$$y = \text{Log}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{x-1}{x-2}\right).$$

Préciser le domaine de définition de f.
Étudier f et construire sa représentation graphique (C) dans un repère orthonormé dont les axes sont $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$.
Démontrer que (C) admet un centre de symétrie.

2. Étudier la fonction g qui, au nombre réel x, fait correspondre le nombre réel

$$z = \text{Log}\left(\frac{3}{2}\left|\frac{x-1}{x-2}\right|\right).$$

Démontrer que la représentation graphique $\left(C'\right)$ de la fonction g admet un centre de symétrie.

EXERCICE 2

Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation, où z est l'inconnue,

$$(1+\text{i})z^2 - (2-\text{i})z - \text{i} = 0.$$

En déduire les solutions de l'équation, où u est l'inconnue,

$$(1+\text{i})u^6 - (2-\text{i})u^3 - \text{i} = 0.$$

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$; les axes en sont $x'\text{O}x$ (dirigé par $\vec{\imath}$) et $y'\text{O}y$ (dirigé par $\vec{\jmath}$).
Soit les points $\text{A}(a~;~0)$ et $\text{B}(a~;~b)$.

1. k étant un réel strictement positif, on envisage l'homothétie : $\mathcal{H}(\text{O},~k)$ dont O est le centre et k le rapport ; dans cette homothétie, A et B sont transformés respectivement en A' et en B'.

   a. Démontrer qu'il existe une homothétie qui transforme A en B' et B en A' ; construire le centre O' et déterminer le rapport k' de cette homothétie $\mathcal{H}'$.

   b. $\mathcal{H}''$ étant l'homothétie réciproque de $\mathcal{H}'$, vérifier que la transformation $\mathcal{H}''\circ\mathcal{H}$ ($\mathcal{H}$ suivie de $\mathcal{H}''$) est la symétrie par rapport au milieu I de [AB].

   c. En déduire que la droite (OO') passe par I et par le milieu I' de $[\text{A}'\text{B}']$.

   d. Calculer les coordonnées de O'.

   e. Étudier l'ensemble des points O' lorsque, a et b restant constants, k varie tout en restant strictement positif ; préciser la position limite de O' lorsque k croit indéfiniment.

   f. Démontrer que, dans les conditions ainsi précisées, on définit une application bijective de l'ensemble des points O' sur $\mathbb{R}_+ - \{0\}$.

2. Dans cette question, k reste constant (strictement positif).

a. Démontrer que O$'$ est le transformé de B par une transformation $\mathscr{T}$ qui est le produit, commutatif, d'une homothétie dont le centre est O et d'une affinité orthogonale dont l'axe est le support de Ox ; préciser les éléments de ces transformations.

b. On suppose que a et b varient de telle façon que B décrive le cercle dont O est le centre et dont R mesure le rayon ; démontrer que l'ensemble des points O$'$ est une ellipse, dont on déterminera les foyers et les directrices (pour dessiner la figure, on choisira $k = 2$).

3. Dans cette question, k reste constant (strictement positif) ; à tout point du plan, dont les coordonnées sont les réels x et y, on associe son affixe, le complexe $z = x + \mathrm{i}y$.

t est alors un réel variable ; M est le point dont l'affixe est $u = t + \mathrm{i}$.

a et b varient de telle façon que B soit le transformé de M dans la transformation définie par $z = u^2$.

Démontrer que l'ensemble des points B est une parabole (P) et que l'ensemble des points O$'$ est une parabole $\left(P'\right)$; comparer ces paraboles lorsque k est égal à 1.

On choisit désormais $k = 2$; tracer alors sur le même dessin les paraboles (P) et $\left(P'\right)$ ainsi que l'ensemble des points M ; à partir de l'un de ces points M, indiquer les constructions successives de B, I, A$'$ et O$'$.

Calculer le rapport des aires des deux domaines plans finis où les abscisses sont négatives et les ordonnées positives, et qui sont situés entre l'axe des abscisses et, respectivement, (P) ou $\left(P'\right)$.