Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Nantes juin 1972 ∾

EXERCICE 1

On considère la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x + 1 + 2\text{e}^{-2x}$$

1. Étudier les variations de f et tracer la courbe représentative (C) de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé dont l'un des axes est $x'\text{O}x$.
2. Calculer l'aire du domaine plan limité par (C), son asymptote et les droites ayant pour équations respectives $x = 0$ et $x = m$ $(m > 0)$.

   Quelle est la limite de cette aire quand m croît indéfiniment ?

EXERCICE 2

Une personne a placé une somme, S. À la fin de chaque année, l'intérêt de ce placement est égal à $\dfrac{1}{25}$ de la somme due au début de cette même année ; cette personne peut percevoir effectivement l'intérêt ou bien le laisser placé à son tour : en fait elle choisit cette seconde solution.

1. Quelle somme lui est-il dû à la fin de la deuxième année, de la troisième année, de la n-ième année $\left(n \in \mathbb{N}^\star\right)$?
2. Pendant combien d'années, au moins, lui faudra-t-il poursuivre son placement pour qu'il lui soit dû une somme supérieure à $2S$?

PROBLÈME

Partie A

Soit E un plan vectoriel euclidien et $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ une base orthonormée de E. Une application linéaire, f, de E dans E admet pour matrice dans la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

(a et b sont des nombres réels donnés).

1. Déterminer l'ensemble (Δ) des vecteurs de E invariants par f. Quelles conditions faut-il imposer à a et à b pour que f soit la transformation identique de E ?

   Lorsqu'il n'en est pas ainsi, démontrer que (Δ) est une droite vectorielle, dont on donnera un vecteur de base.
2. Déterminer le noyau, N, de f, c'est-à-dire l'ensemble, N, des vecteurs $\vec{u}$ de E vérifiant $f\left(\vec{u}\right) = \vec{0}$.

   À quelle condition N contient-il des vecteurs non nuls ? Démontrer que, dans ce cas, N est une droite vectorielle, dont on donnera une base.
3. On suppose $a = b$.

a. Démontrer que (Δ) et N sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Définir géométriquement l'application f.

b. On suppose, de plus, $a = b = 2$; démontrer que f est alors la projection orthogonale sur (Δ).

On désigne par g la projection orthogonale sur N et par h la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à (Δ); si $\overrightarrow{v}$ est un vecteur quelconque de E, quelles relations simples peut-on établir entre $\overrightarrow{v}$, $f\left(\overrightarrow{v}\right)$, $g\left(\overrightarrow{v}\right)$ et $h\left(\overrightarrow{v}\right)$?

En déduire les matrices, dans la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, de g et de h.

4. On suppose, dans cetLe question,

$$(a-b)(a-b-1)(a-1)b \neq 0.$$

On se propose d'étudier les vecteurs $\overrightarrow{u}$ non nuls de E vérifiant $f\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda\overrightarrow{u}$, où λ est un réel.

a. Démontrer qu'il existe deux valeurs, λ_1 et λ_2 de λ répondant à cette question.

b. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ (resp. $\overrightarrow{u_2}$) associés à λ_1 (resp. λ_2) sont les vecteurs d'un sous-espace vectoriel (D_1) [resp. (D_2)] de E.

Indiquer une base de (D_1) et une base de (D_2). Démontrer que (D_1) et (D_2) sont supplémentaires.

c. Démontrer que, à tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de E, on peut associer $\overrightarrow{v_1}$ de (D_1) et $\overrightarrow{v_2}$ de (D_2) de façon à obtenir

$$f\left(\overrightarrow{v}\right) = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2}.$$

d. *Exemple* : $a = -1, b = 2$. Préciser (D_1), (D_2) et $f\left(\overrightarrow{v}\right)$.

Partie B

On considère le plan affine euclidien, $(\mathscr{E})$, de direction E et rapporté au repère $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
Soit φ l'application affine associée à f et pour laquelle $\text{O}' = \varphi(\text{O})$ est O : le transformé $M' = \varphi(M)$ d'un point quelconque M de $(\mathscr{E})$ est donc défini par $\overrightarrow{\text{O}M'} = f\left(\overrightarrow{\text{O}M}\right)$.
On suppose de plus que l'on a $a = -1$ et $b = 2$.

1. Démontrer que l'expression analytique de φ, dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, est donnée par les relations

$$M(x\,;\ y) \longmapsto \varphi(M) = M'(x'\,;\ y'),$$

avec

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -x+2y \\ y' & = & 2x-y. \end{array}\right.$$

2. On considère le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J}\right)$ défini par

$$\overrightarrow{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\jmath} \qquad \overrightarrow{J} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\jmath}$$

Démontrer que, dans ce nouveau repère, l'expression analytique de φ est, avec $M(X\,;\ Y) \longmapsto M'(X'\,;\ Y')$,

$$\left\{\begin{array}{lcr} X' & = & -3X \\ Y' & = & Y. \end{array}\right.$$

On pourra pour cela exprimer $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ en fonction de $\overrightarrow{I}$ et de $\overrightarrow{J}$.

3. Soit ($\mathscr{C}$) le cercle dont l'équation dans le repère $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ est

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0.$$

Quelle est l'équation de ce cercle dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$?

En déduire l'équation, la nature et les éléments remarquables de la courbe $\left(\mathscr{C}'\right)$, transformée de ($\mathscr{C}$) par φ.

(Faire une figure précise en utilisant les résultats de la question précédente.)