Baccalauréat C Nantes juin 1973

EXERCICE 1

Au nombre complexe z, on associe le nombre

$$Z = z^2 - (9-2\text{i})z + 26.$$

1. Déterminer un complexe u vérifiant $u^2 = 3+4\text{i}$ (on pourra poser $u = a+\text{i}b$, où a et b sont réels).
2. Résoudre l'équation

$$z^2 - (9-2\text{i})z + 26 = 0.$$

3. M désigne l'image de z dans un plan rapporté à un repère orthonormé.
   Quelle est l'équation de l'ensemble (γ_1) des points M tels que Z soit réel ?
   (On posera $z = x+\text{i}y$.)
4. Quelle est l'équation de l'ensemble (γ_2) des points M tels que Z soit nul ou imaginaire pur ?
5. Reconnaître ces deux ensembles et préciser les coordonnées de leurs points d'intersection. Dessiner les ensembles (γ_1) et (γ_2).

EXERCICE 2

On considère une fonction numérique f continue sur $[0\,;\,1]$ et satisfaisant, pour tout x de $[0\,;\,1]$, à

$$f(x) \in [0\,;\,1].$$

Soit alors φ la fonction numérique définie sur $[0\,;\,1]$ par

$$\varphi(x) = f(x) - x.$$

1. En appliquant à φ le théorème des valeurs intermédiaires, démontrer qu'il existe a de $[0\,;\,1]$ vérifiant

$$f(a) = a.$$

2. On suppose de plus que t est dérivable sur $]0\,;\,1[$ et que sa dérivée vérifie, pour tout x de $]0\,;\,1[$, la condition $f'(x) < 1$.
   Démontrer alors que a est unique.
   Construire un exemple et un contre-exemple simples.

EXERCICE 3

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté, de dimension 3, rapporté à une base orthonormée directe $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{\imath}\,,\ \overrightarrow{\jmath}\,,\ \overrightarrow{k}\right)$.

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire de E et (Δ) la droite vectorielle dirigée par $\overrightarrow{u}$. Soit (Π) le plan vectoriel orthogonal à (Δ).

1. On appelle p et q les endomorphismes de E qui, à tout vecteur $\overrightarrow{w}$ de E, associent respectivement sa projection orthogonale sur (Δ) et sa projection orthogonale sur (Π).
Démontrer que l'on a

$$p\left(\overrightarrow{w}\right) = \left(\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u}\right)\overrightarrow{u}.$$

On particularise $\overrightarrow{u}$ en choisissant

$$\overrightarrow{u_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\overrightarrow{\imath}\,,\ \overrightarrow{\jmath}\,,\ \overrightarrow{k}\right);$$

S'assurer que $\overrightarrow{u_0}$ est unitaire; indiquer, dans la base $\mathscr{B}$, les coordonnées de $\overrightarrow{u_0}$ puis les coordonnées de $p\left(\overrightarrow{w}\right)$ en fonction des coordonnées de $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k}$; en déduire, dans la même base, les coordonnées de $q\left(\overrightarrow{w}\right)$.

2. Soit s l'application de E dans E qui, à tout vecteur $\overrightarrow{w}$ de E, associe le produit vectoriel

$$s\left(\overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}.$$

Démontrer que s est un endomorphisme de E.
Dans le cas où $\overrightarrow{u}$ est $\overrightarrow{u_0}$, indiquer dans la base $\mathscr{B}$ les coordonnées de $s\left(\overrightarrow{w}\right)$ en fonction de celles de $\overrightarrow{w}$.

3. Démontrer que $(s \circ q)\left(\overrightarrow{w}\right) = s\left(\overrightarrow{w}\right)$.
Comparer les normes de $s\left(\overrightarrow{w}\right)$ et de $q\left(\overrightarrow{w}\right)$.
Démontrer que $s\left(\overrightarrow{w}\right)$ appartient à (Π) et indiquer l'angle des vecteurs $q\left(\overrightarrow{w}\right)$ et $s\left(\overrightarrow{w}\right)$.
Démontrer que $(s \circ s)\left(\overrightarrow{w}\right) = -q\left(\overrightarrow{w}\right)$.

4. Soit r la rotation vectorielle d'axe (Δ) dont une mesure relative à $\overrightarrow{u}$ est α; démontrer, pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ de E, que l'on a

$$\left\{\begin{array}{rcl} r\left(\overrightarrow{w}\right) & = & p\left(\overrightarrow{w}\right) + (r \circ q)\left(\overrightarrow{w}\right), \\ (r \circ q)\left(\overrightarrow{w}\right) & = & \cos\alpha\, q\left(\overrightarrow{w}\right) + \sin\alpha\, s\left(\overrightarrow{w}\right). \end{array}\right.$$

Dans le cas particulier où $\overrightarrow{u}$ est $\overrightarrow{u_0}$ indiquer les coordonnées de $r\left(\overrightarrow{w}\right)$ dans la base $\mathscr{B}$ en fonction de α et des coordonnées de $\overrightarrow{w}$.
On particularise r en choisissant $\alpha = \dfrac{2}{3}$: quelle est, avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_0}$, la transformée de $\mathscr{B}$ par r ?

5. Déterminer une base orthonormée directe, $\mathscr{B}' = \left(\overrightarrow{v_1}\,,\ \overrightarrow{v_2}\,,\ \overrightarrow{v_3}\right)$, telle que $\overrightarrow{v_1}$ appartienne au plan vectoriel dont une base est $\left(\overrightarrow{\imath}\,,\ \overrightarrow{\imath}\right)$ et que $\overrightarrow{\imath} \cdot \overrightarrow{v_1}$ soit positif; on indiquera les coordonnées de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ dans la base $\mathscr{B}$.

6. Quelle est la nature de l'endomorphisme t de E transformant $\mathscr{B}$ en $\mathscr{B}'$? (On ne demande pas de préciser les éléments de t.)
Soit t^{-1} l'endomorphisme réciproque de t; calculer

$$\left(t^{-1} \circ r \circ t\right)\left(\overrightarrow{k}\right) \quad \text{et} \quad \left(t^{-1} \circ r \circ t\right)\left(\overrightarrow{\imath}\right).$$

Quelle est la nature de $t^{-1} \circ r \circ t$?