∽ Baccalauréat C Nantes juin 1974 ∾

EXERCICE 1

Étudier les restes des divisions par 9 des puissances successives de 2.
Démontrer que le nombre $2^{2n}\left(2^{2n+1}-1\right)-1$ est toujours divisible par 9, quel que soit l'entier naturel n.

EXERCICE 2

a et b étant deux réels donnés, on note f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{lclll} f(x) & = & x\mathrm{e}^x & \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} \text{ vérifiant} & x \leqslant 1\\ f(x) & = & ax+b & \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} \text{ vérifiant} & x > 1\end{array}\right.$$

1. **a.** Indiquer une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que la fonction f soit continue au point 1.

   b. Déterminer les valeurs de a et b pour que la fonction f soit dérivable au point 1.
2. Étudier les variations de la fonction g définie par

$$\left\{\begin{array}{lclll} g(x) & = & x\mathrm{e}^x & \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} \text{ vérifiant} & x \leqslant 1\\ g(x) & = & \mathrm{e}(2x-1) & \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} \text{ vérifiant} & x > 1\end{array}\right.$$

   Tracer sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction h définie par

$$h(x) = x\mathrm{e}^x.$$

   Calculer l'aire du domaine plan défini par

$$0 \leqslant x \leqslant 2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant g(x)$$

PROBLÈME

$\mathcal{E}$ désigne un espace affine euclidien dont la dimension est 3. E désigne l'espace vectoriel euclidien orienté associé à $\mathcal{E}$. Un repère cartésien orthonormé direct de $\mathcal{E}$ est $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath},~\overrightarrow{k}\right)$. Soit $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ les vecteurs de E définis par

$$\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}\right) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}\right)$$

On désigne par D la droite vectorielle de E dont $\overrightarrow{e_1}$ est une base et par P le plan vectoriel de E orthogonal à D.
$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont la droite affine et le plan affine de $\mathcal{E}$,issus de O et associés respectivement à D et à P.

1. **a.** Démontrer que $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ sont des vecteurs unitaires.

   b. Démontrer qu'il existe une rotation vectorielle de E qui transforme $\left(\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath},~\overrightarrow{k}\right)$ en $\left(\overrightarrow{e_1},~\overrightarrow{e_2},~\overrightarrow{k}\right)$.

   c. Si $\mathcal{D}$ est orienté par $\overrightarrow{e_1}$, $\mathcal{P}$ se trouve orienté : démontrer que $\left(\mathrm{O},~\overrightarrow{e_2},~\overrightarrow{k}\right)$ est un repère orthonormé direct de $\mathcal{P}$.

2. On envisage l'application affine f de $\mathscr{E}$ vers $\mathscr{E}$ qui laisse O invariant et dont l'endomorphisme associé φ est défini par

$$\left\{\begin{array}{rcl}\varphi(\overrightarrow{\imath}) &=& 3\overrightarrow{\imath}+\overrightarrow{\jmath}-\sqrt{6}\overrightarrow{k}\\ \varphi(\overrightarrow{\jmath}) &=& \overrightarrow{\imath}+3\overrightarrow{\jmath}+\sqrt{6}\overrightarrow{k}\\ \varphi(\overrightarrow{k}) &=& \sqrt{6}\overrightarrow{\imath}-\sqrt{6}\overrightarrow{\jmath}+2\overrightarrow{k}\end{array}\right.$$

a. Si M' est l'image par f d'un point M de $\mathscr{E}$, calculer les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ de M' dans le repère $\mathscr{R}$ en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de M dans ce même repère.

Démontrer que O est le seul point de $\mathscr{E}$ qui soit invariant par f.

b. Préciser le noyau de l'endomorphisme φ ; en déduire que f est bijective,

c. Démontrer que D est globalement invariante par φ. Quelle est la restriction h de f à $\mathscr{D}$?

d. La restriction de f à $\mathscr{P}$ est notée s ; l'application linéaire associée, restriction de φ à P, est notée σ.

Démontrer que σ est défini par

$$\sigma\left(\overrightarrow{e_2}\right)=2\overrightarrow{e_2}+2\sqrt{3}\overrightarrow{k}\quad\text{et}\quad\sigma\left(\overrightarrow{k}\right)=-2\sqrt{3}\overrightarrow{e_2}+2\overrightarrow{k}.$$

En conclure que s est une similitude dont on précisera les éléments.

e. Déduire des questions précédentes que f est la composée d'une homothétie (dont le centre est O) et d'une rotation r (dont on précisera les éléments).

Démontrer que ces deux applications commutent.

3. On désigne par g l'application affine de $\mathscr{P}$ vers $\mathscr{P}$ laissant O invariant et dont l'endomorphisme associé γ est défini par

$$\gamma\left(\overrightarrow{e_2}\right)=\frac{1}{8}\left(\overrightarrow{e_2}+\sqrt{3}\overrightarrow{k}\right)\quad\text{et}\quad\gamma\left(\overrightarrow{k}\right)=\frac{1}{8}\left(\sqrt{3}\overrightarrow{e_2}-\sqrt{3}\overrightarrow{k}\right)$$

a. L'équation $\gamma\left(\overrightarrow{u}\right)=\lambda\overrightarrow{u}$ (où λ est un réel) admet la solution $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ pour toute valeur de λ : démontrer qu'il existe deux valeurs particulières de λ , et deux seulement, pour lesquelles cette équation admet d'autres solutions que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$.

En déduire que γ laisse globalement invariantes deux droites vectorielles D_1 et D_2 de P que l'on précisera,

Démontrer que D_1 et D_2 sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux de P.

b. Utiliser les résultats précédents pour démontrer que g s'écrit comme la composée d'une homothétie k (dont le centre est O) et d'une symétrie affine orthogonale a dont on précisera l'axe $\mathscr{A}$.

Démontrer que k et a commutent,

c. Démontrer qu'il existe dans $\mathscr{P}$ une droite $\mathscr{A}'$ telle que, si a' désigne la symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{A}'$, la similitude de s (voir 2. d.) puisse s'écrire

$$s=k^{-1}\circ a\circ a'$$

Déterminer alors $g\circ s$.

d. Démontrer que l'application affine u de $\mathscr{E}$ dont les restrictions à $\mathscr{D}$ et à $\mathscr{P}$ sont respectivement h^{-1} et g est la composée d'une homothétie (dont le centre est O) et d'une symétrie affine orthogonale par rapport à un plan que l'on précisera.