Durée : 4 heures

Baccalauréat C Nantes juin 1975

EXERCICE 1

On considère l'ensemble $E_4 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ et l'application p de E_4 dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément k de E_4 associe $p(k) = \text{Log}\left(a^k\right)$, ou, a un réel strictement positif.

1. Déterminer a pour que $\left(E_4,\ \mathcal{P}(E_4),\ p\right)$ soit un espace probabilisé.
2. On donne à a la valeur trouvée ci-dessus et on considère la variable aléatoire X définie sur $\left(E_4,\ \mathcal{P}(E_4),\ p\right)$ et associant à chaque élément k de E_4 le nombre $p(k)$.
   Calculer l'espérance mathématique de X, sa variance et son écart-type.
3. Généraliser les résultats précédents à l'ensemble

$$E_n = \{k|\ k \in \mathbb{N},\quad k \leqslant n\}$$

   où n est un entier naturel non nul.
   On rappelle :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},\quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1}{6},\quad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

EXERCICE 2

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\left\{\begin{array}{lll} \forall x \in \mathbb{R} : & f(x+2) & = & f(x) \\ \forall x \in [0\ ;\ 2[: & f(x) & = & x^4 + bx^3 + cx^2 + dx \end{array}\right.$$

où $b,\ c,\ d$ sont des nombres réels.
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'axes $x'\text{O}x,\ y'\text{O}y$.

1. Déterminer $f(2)$.
   Trouver sous la forme d'une relation entre $b,\ c$ et d, une condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer $b,\ c$ et d de manière que f soit continue sur $\mathbb{R}$ et que, de plus, (C) admette le point $\text{I}\left(1\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$ comme extremum relatif.
3. Étudier la dérivabilité de f et construire (C), les valeurs de $b,\ c$ et d étant celles qui ont été trouvées en 2.

PROBLÈME

N. B. Les parties B et C étant indépendantes, le candidat pourra (après avoir étudié la partie A) les traiter dans l'ordre qui lui conviendra

Partie A

Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a-b \end{pmatrix}$$

où a et b sont des nombres réels.
On note respectivement O et I les matrices nulles et unité d'ordre 2 ; on pose

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que E, muni de l'addition des matrices et de la multiplication par un nombre réel, est un espace vectoriel.

   Établir que (I, J) est une base de E et déterminer les composantes d'une matrice de E dans cette base.
2. Calculer J^2. En déduire que la multiplication des matrices est une loi de composition interne dans E.

   Démontrer que E, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, a une structure d'anneau.

   Cet anneau est-il commutatif? unitaire? Admet-il des diviseurs de zéro?

   Quels sont les éléments inversibles de E?
3. Soit M un élément de E. On pose

$$M^1 = M \quad \text{et} \quad M^n = M\,.\,M^{n-1}$$

   pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

   Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, les composantes de M^n dans la base (I, J) sont $\left(a^n\ ;\ na^{n-1}b\right)$.

   Déterminer la matrice $M + M^2 + \ldots + M^n$ à l'aide de ses composantes dans la base (I, J).

Partie B

Soit $\mathscr{P}$ le plan vectoriel de base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ et P le plan affine associé à $\mathscr{P}$, rapporté au repère cartésien $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

Soit f un endomorphisme de $\mathscr{P}$ dont la matrice dans la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ est un élément de E.

1. À quelle condition f est-il un automorphisme de $\mathscr{P}$? f peut-il être involutif?
2. Déterminer le noyau et l'image de f. À quelles conditions a-t-on l'égalité entre ces deux ensembles? Dans ce cas, que peut-on dire de $f \circ f$?
3. Trouver les vecteurs de $\mathscr{P}$ invariants par f.
4. Déterminer les droites vectorielles de $\mathscr{P}$ invariantes par f.
5. On désigne par φ l'application affine de P, associée à f et laissant le point O invariant. Quels sont les points de P invariants par φ?

   Trouver les droites affines de P parallèles à leur transformée par φ.
6. On note M_0 le point de coordonnées $(1\ ;\ -1)$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, puis $M_1 = \varphi\left(M_0\right), \ldots, M_n = \varphi\left(M_{n-1}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$.

   Soit $\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ les coordonnées de M_n dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

   Déterminer x_n et y_n.

   Les suites $\left(x_n\right)$ et $\left(y_n\right)$ sont-elles convergentes?

Partie C

Soit θ l'application de E dans $\mathbb{C}$ qui, à une matrice M de E de composantes a et b dans la base (I, J), associe le nombre complexe $Z = a + \mathrm{i}b$.

1. Démontrer que θ est une application linéaire, bijective, de E sur $\mathbb{C}$.
2. Si $Z = \theta(M)$ et $Z' = \theta\left(M'\right)$, on pose $Z \star Z' = \theta(M.M')$.
   Déterminer $(a+\mathrm{i}b) \star \left(a' + \mathrm{i}b'\right)$ où a, b, a', b' sont des réels.
   Quelle est la structure de $(\mathbb{C}, +, \star)$?
3. Quels sont les nombres complexes admettant un symétrique pour la loi $\star$?
4. On pose, pour $Z \in \mathbb{C}$, $\quad Z^1 = Z, \ldots, Z^{(n)} = Z \star Z^{(n-1)}$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.
   Calculer $Z^{(n)}$.
   Résoudre l'équation $Z^{(n)} = 1$.
   Résoudre l'équation $Z^{(2)} - 5Z + \dfrac{25}{4} = 0$.