

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Nantes juin 1976 ∞

EXERCICE 1

Soit A l'anneau $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

1. Résoudre dans $A \times A$ le système d'équations :

$$\begin{cases} \bar{6}x + \bar{4}y &= \bar{4} \\ \bar{5}x + y &= \bar{4} \end{cases}$$

2. Résoudre dans A l'équation :

$$x^2 + \bar{4}x + \bar{3} = \bar{0}.$$

EXERCICE 2

On rappelle que l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes a une structure d'espace vectoriel réel dont une base est $\mathcal{B} = (1, i)$.

Soit p un complexe donné :

$$p = a + ib \quad (a \text{ et } b \text{ sont réels}).$$

On considère l'application f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} qui, à tout complexe z , associe Z défini par :

$$Z = z + p\bar{z} \quad (E)$$

(\bar{z} désigne le complexe conjugué de z).

- Démontrer que f est une application linéaire de \mathbb{C} dans \mathbb{C} .
- Trouver en fonction de a et b la matrice M de f par rapport à la base $\mathcal{B} = (1, i)$.
 - Démontrer que f est une bijection si, et seulement si, $a^2 + b^2$ est différent de 1.
- À partir de la relation (E), trouver une relation entre z , Z et \bar{Z} .
Retrouver ainsi le résultat de la question 2. b.

PROBLÈME

Le plan affine euclidien P est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

Chaque point M du plan peut être repéré par ses coordonnées réelles $(x; y)$ ou par son affixe complexe $z = x + iy$.

Partie A

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = e^{-2x} + x + 1.$$

- Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative (C) dans le repère \mathcal{R} .
(On étudiera avec soin les branches infinies de (C) : on pourra étudier le comportement de $\frac{f(x)}{x}$ pour les valeurs de x négatives et de « grande » valeur absolue.)
On indiquera les valeurs exactes des coordonnées du point correspondant au minimum de f .
Pour dessiner (C) , on utilisera l'approximation $\text{Log } 2 \approx 0,7$.
- Calculer l'aire $\mathcal{A}(m)$ de la surface plane finie limitée par la courbe (C) , l'axe (O, \vec{j}) des ordonnées, l'asymptote oblique de (C) et la droite d'équation $x = m$, m étant un réel positif donné.
Étudier $\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(m)$.

Partie B

\mathcal{P} étant le plan vectoriel associé au plan affine P , on considère l'endomorphisme φ de \mathcal{P} (application linéaire de \mathcal{P} dans \mathcal{P}) défini par sa matrice A dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- φ est-il un automorphisme? Démontrer qu'il existe trois réels k, a, b avec

$$k > 0 \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = 1$$

qui vérifient

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

En déduire qu'il existe une homothétie vectorielle h et une symétrie vectorielle orthogonale s par rapport à une droite vectorielle (que l'on déterminera avec précision) qui vérifient :

$$\varphi = h \circ s = s \circ h.$$

- Soit F celle des applications affines du plan P associée à l'endomorphisme φ qui transforme le point O en le point $O'(-1; -1)$.
 - Le point M ayant pour coordonnées $(x; y)$, calculer les coordonnées $(x'; y')$ de son image M' par F .
Calculer l'affixe z' de M' en fonction de \bar{z} (on rappelle que z désigne l'affixe de M et que \bar{z} désigne le conjugué de z).
 - Déterminer les coordonnées du point Ω invariant par F .
Si H est l'homothétie de centre Ω , et de rapport k , déterminer la transformation S définie par :

$$F = H \circ S = S \circ H.$$

Quelle est la nature de F ?

Partie C

- Démontrer que la courbe (C') transformée de (C) par F admet pour équation :

$$y = g(x) \quad \text{avec} \quad g(x) = x - \text{Log } x$$

(Log désigne la fonction logarithme népérien).

2. Étudier les variations de la fonction g et construire la courbe (C') .
3. n étant un entier naturel donné, déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe (C') et de la droite (Δ_n) d'équation :

$$y = x + n.$$

4. Soit (U_n) la suite numérique dont le terme général U_n est égal à l'aire de la surface plane finie limitée par la courbe (C') , l'axe (O, \vec{j}) des ordonnées et les droites (Δ_n) et (Δ_{n+1}) .
 - a. Calculer U_n et montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
 - b. Calculer la somme S_p des $(p + 1)$ premiers termes de cette suite, soit

$$S_p = \sum_{n=0}^{p} U_n$$

- c. Étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_p$.

Justifier le résultat obtenu en utilisant la limite de l'aire calculée en A 2. et l'application F définie dans B.