∽ Baccalauréat C Nantes juin 1977 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Soit f l'application, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x \leqslant 0 & : & f(x) = \mathrm{e}^{-x} + 1 \\ x > 0 & : & f(x) = 2 + x \operatorname{Log} x \end{array}\right.$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. Étudier le sens de variation de f. Tracer sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ l'axe $x'\mathrm{O}x$ des abscisses est dirigé par $\vec{\imath}$; on précisera les branches infinies et les demi-tangentes à $(\mathscr{C})$ au point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse nulle.
3. m étant un réel strictement positif et inférieur à 1, calculer l'aire $\mathscr{A}(m)$ de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient :

$$m \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f(x) \leqslant y \leqslant 2.$$

Étudier $\displaystyle\lim_{m \to 0} \mathscr{A}(m)$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

x est un entier naturel vérifiant : $2 \leqslant x \leqslant 8$ et n est un entier relatif quelconque.

Un sac contient 10 boules dont x sont numérotées n et dont les $(10 - x)$ restantes sont numérotées 1. On tire simultanément deux boules du sac : les tirages ainsi faits sont supposés équiprobables.

1. Définir un espace probabilisé fini $(\Omega,\ \mathscr{P}(n),\ p)$ permettant de décrire l'épreuve.
2. On envisage la variable aléatoire réelle X qui, à tout événement élémentaire, associe la somme des nombres inscrits sur les boules tirées. Préciser l'image de n par X, et définir la loi de probabilité de X.
3. Calculer, en fonction de x et n, l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ de X.
4. Dans cette question on choisit n égal à (-4) : calculer la variance de X.

PROBLÈME **12 POINTS**

Soit E un espace affine euclidien orienté de dimension 3 ; on désigne par V l'espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) associé à E.
$\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ désigne un repère orthonormé direct de E.
F étant une partie non vide de E ou de V, on notera I_F l'identité sur F ; en particulier l'identité I_{V} sera simplifiée en I.
Étant donné un sous-espace vectoriel U de V, on notera $\mathscr{L}(\mathrm{U})$ l'ensemble des endomorphismes de U, c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires de V dans V.
$\mathscr{D}$ est la droite vectorielle de V engendrée par $\vec{k}$ et $\mathscr{P}$ est le plan vectoriel orthogonal à $\mathscr{D}$. $\mathscr{D}$ est orientée par $\vec{k}$; $\mathscr{P}$ se trouve donc ainsi orienté.

Partie A

On note ϕ l'ensemble des isométries vectorielles φ de V qui vérifient les conditions :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varphi\left(\vec{k}\right) & = & \vec{k} \\ \varphi \circ \varphi \circ \varphi & = & \mathrm{I} \end{array}\right.$$

1. Démontrer que tout élément de ϕ est une rotation vectorielle.

   On désigne par J la rotation vectorielle dont l'axe est $\mathcal{D}$ et dont l'angle mesure $\dfrac{2\pi}{3}$; démontrer que ϕ est l'ensemble $\{\text{I}, J, K\}$ avec $K = J \circ J$.
2. On considère l'endomorphisme somme des trois éléments de ϕ ; caractériser les restrictions de cet endomorphisme respectivement à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$; décrire cet endomorphisme comme le composé de deux endomorphismes simples de V.
3. Démontrer que I et $L = J + K$ engendrent un plan vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\text{V})$. α et β étant deux réels, on notera $f_{\alpha,\,\beta}$ l'endomorphisme $\alpha\text{I} + \beta L$ (on rappelle que les endomorphismes α I et βL associent à tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de V respectivement les vecteurs

$$(\alpha\text{I})\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{v} \quad \text{et} \quad (\beta L)\left(\overrightarrow{v}\right) = \beta \cdot L\left(\overrightarrow{v}\right).$$

Partie B

On note G l'application affine de E vers E qui laisse O invariant et dont l'endomorphisme associé est $f_{0,\,-1}$.

1. **a.** Définir analytiquement G.

   b. Démontrer que l'ensemble des points invariants par G est le plan P contenant O et de direction $\mathcal{P}$.

   c. M étant un point de E, on désigne par m le projeté orthogonal de M sur P.

   Vérifier la relation : $\overrightarrow{mG(M)} = -2\overrightarrow{mM}$.
2. Déterminer les plans de E invariants par G ; caractériser la restriction de G à un tel plan distinct de P.
3. a étant un réel non nul, on envisage le cercle (C) du plan d'équation $x = 0$, qui passe par O et dont le centre est le point $\Omega(0~;~a~;~0)$.

   Démontrer que l'image (Γ) de (C) par G est une conique dont on précisera la nature et les éléments géométriques (centre, axes, foyers, ...).

   Construire (C) et (Γ) dans le cas particulier : $a = 2$.

Partie C

Soit A un point de E. Étant donnés deux réels α et β, on note $F_{\alpha,\,\beta}$, l'application affine de E vers E qui laisse A invariant et dont l'endomorphisme associé est $f_{\alpha,\,\beta}$. On désigne par $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications $F_{\alpha,\,\beta}$ α et β décrivant $\mathbb{R}$.
Q et D désignent les variétés affines de E contenant A et de directions respectives $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$.

1. Démontrer que les restrictions de $f_{\alpha,\,\beta}$ à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{D}$ sont respectivement :

$$(\alpha - \beta)\text{I}_{\mathcal{P}} \quad \text{et} \quad (\alpha + 2\beta)\text{I}_{\mathcal{D}}$$

   En déduire les restrictions de $F_{\alpha,\,\beta}$ à Q et à D respectivement.
2. Déterminer les éléments de $\mathcal{F}$ qui sont des isométries.
3. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications $F_{\frac{2}{3},\,-\frac{1}{3}}$ et $F_{\frac{1}{3},\,\frac{1}{3}}$.
4. α étant un réel non nul distinct de $\dfrac{1}{3}$, démontrer que $F_{\alpha,\,\alpha}$ est la composée de deux applications affines simples que l'on précisera.
5. α et β désignent deux réels distincts.

a. M étant un point de E, on note M' et m ses images respectives par $F_{\frac{\alpha}{\alpha-\beta},\ \frac{\beta}{\alpha-\beta}}$ et par la projection orthogonale sur Q.
Démontrer qu'il existe un réel k, que l'on précisera, tel que, quel que soit M, on ait :

$$\overrightarrow{mM'} = k\overrightarrow{mM}.$$

b. Démontrer que $F_{\alpha,\ \beta}$ est la composée de $F_{\frac{\alpha}{\alpha-\beta},\ \frac{\beta}{\alpha-\beta}}$ et d'une homothétie que l'on caractérisera.