# ∽ Baccalauréat C Nantes juin 1978 ∾

**EXERCICE 1** **3 POINTS**

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation suivante d'inconnue $x$ :

$$3x^2 + 4x \equiv 0 \quad [\text{modulo } 21].$$

**EXERCICE 2** **4 POINTS**

Soit $f$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^3 + az^2 + bz - 42 + 24\text{i}.$$

où $a$ et $b$ sont des éléments de $\mathbb{C}$.

1. Déterminer $a$ et $b$ sachant que :

$$\left\{\begin{array}{l c l} f(1) & = & -44 + 32\text{i} \\ f(-1) & = & -30 + 16\text{i}. \end{array}\right.$$

2. On suppose, dans cette question, que : $a = 5$ et $b = -8 + 8\text{i}$.
Démontrer qu'il existe un réel $r$, et un seul, tel que $f(r) = 0$ et résoudre dans $\mathbb{C}$ alors l'équation (E) d'inconnue $z$ :

$$f(z) = 0. \qquad \text{(E)}$$

On appelle $z_1$, $z_2$ et $z_3$ les solutions de (E) ; on note $Z$ le complexe

$$z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1.$$

Calculer $Z$. Déterminer le module et un argument de $Z$.

**PROBLÈME** **4 POINTS**

**La partie C du problème est indépendante des parties A et B**

## Partie A

Soit $\mathscr{E}$ un espace vectoriel euclidien orienté de dimension trois dont une base orthonormée directe est $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.

1. Soit $\varphi$ l'endomorphisme de $\mathscr{E}$ (application linéaire de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$) défini par

$$\left\{\begin{array}{l c l} \varphi\left(\overrightarrow{\imath}\right) & = & \overrightarrow{k} \\ \varphi\left(\overrightarrow{\jmath}\right) & = & -\overrightarrow{\jmath} \\ \varphi\left(\overrightarrow{k}\right) & = & \overrightarrow{\imath} \end{array}\right.$$

Démontrer que $\varphi$ est une isométrie vectorielle involutive de $\mathscr{E}$.
Déterminer $\varphi(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{k})$ et $\varphi(\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{k})$.
Caractériser $\varphi$.

**2.** Soit $\Psi$ le demi-tour vectoriel de $\mathscr{E}$ (symétrie vectorielle orthogonale par rapport à une droite vectorielle) dont l'axe est la droite vectorielle de base $\left(\overrightarrow{\imath}\right)$.

On désigne par $\theta$ l'endomorphisme $\varphi \circ \Psi$ de $\mathscr{E}$.

**a.** Déterminer $\theta\left(\overrightarrow{\imath}\right)$, $\theta\left(\overrightarrow{\jmath}\right)$ et $\theta\left(\overrightarrow{k}\right)$.

**b.** Démontrer que $\theta$ est une rotation vectorielle dont l'axe $\mathscr{D}$ est la droite vectorielle de base $\left(\overrightarrow{\jmath}\right)$.

On désigne par $\mathscr{P}$ le plan vectoriel orthogonal à $\mathscr{D}$. Dans la suite du problème le plan $\mathscr{P}$ sera orienté : $\left(\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{\imath}\right)$ est une base orthonormée directe; la droite vectorielle $\mathscr{D}$ est alors orientée : $\left(\overrightarrow{\jmath}\right)$ est une base directe.

Donner une mesure de l'angle de la rotation vectorielle $\theta$ d'axe $\mathscr{D}$ orienté.

**Partie B**

Soit E un espace affine euclidien associé à $\mathscr{E}$ ; il est rapporté au repère orthonormé $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$.

**1.** Soit $f$ l'application affine de E vers E qui est associée à l'endomorphisme $\varphi$ et qui transforme le point O en le point A de coordonnées $(2\,;0\,;2)$.

**a.** Définir analytiquement $f$.

**b.** Démontrer que $f$ est un vissage et que $f$ est la composée, dans un ordre indifférent, d'un demi-tour affine (un demi-tour affine est également appelé un retournement) et d'une translation $t$; préciser l'axe du demi-tour affine et le vecteur de la translation.

**2.** Soit $g$ l'application affine de E vers E qui est associée à l'endomorphisme $\psi$ et qui laisse le point O invariant.

Caractériser $g$.

**3.** Soit $h$ l'application affine de E vers E définie par $h = f \circ g$.

**a.** Démontrer que $h = t \circ r$, où $t$ désigne la translation définie au B 1. b. et $r$ une rotation affine, dont on précisera l'axe (D).

**b.** On désigne par (P) le plan affine qui contient O et dont la direction est le plan vectoriel $\mathscr{P}$ précédemment défini.

Démontrer que (P) est globalement invariant par $h$.

**c.** On note $h'$ la restriction de $h$ à (P).

Définir analytiquement $h'$, (P) étant rapporté au repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{k},\ \overrightarrow{\imath}\right)$.

Démontrer que $h'$ est une rotation affine, dont on précisera le centre I et une mesure de l'angle.

**d.** Démontrer que $h$ est une rotation affine, dont on précisera l'axe (D$'$).

La direction de (D$'$) est orientée par le choix de la base directe $\left(\overrightarrow{\jmath}\right)$ : donner une mesure de l'angle de la rotation $h$.

**4.** On conserve l'orientation de la droite affine (D$'$).

Soit alors $W$ le vissage dont l'axe est (D$'$), dont l'angle admet pour mesure $\alpha$, dont le vecteur est $-\alpha\overrightarrow{\jmath}$.

À un point $M$ quelconque, de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$, $W$ associe le point $M' = W(M)$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$.

Établir que l'on a

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' &=& x\cos\alpha + z\sin\alpha - 2\sin\alpha,\\ y' &=& y - \alpha,\\ z' &=& -x\sin\alpha + z\cos\alpha - 2\cos\alpha + 2.\end{array}\right.$$

**Partie C**

**1.** Soit $u$ l'application de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$u:\ t \longmapsto u(t) = \mathrm{e}^t + \operatorname{Log} t.$$

Démontrer que $u$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^\star$ sur $\mathbb{R}$.

**2.** Soit $v$ l'application de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$v:\ t \longmapsto v(t) = t^2\mathrm{e}^t - 1.$$

Étudier les variations de la fonction $v$.

**3.** $u''$ désigne la fonction dérivée seconde de la fonction $u$. Démontrer que, dans $\mathbb{R}_+^\star$, l'équation $u''(t) = 0$ admet une solution unique $t_0$ et que l'on a $\dfrac{1}{2} < t_0 < 1$.

Étudier le signe de $u''(t)$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.

**Partie D**

Dans l'espace affine euclidien E, on considère le point mobile $N$ dont les coordonnées, dans le repère $\mathcal{R}$, sont à l'instant $t$ $\left(t \in \mathbb{R}_+^\star\right)$ :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \cos u(t), \\ y & = & u(t), \\ z & = & 2 + \sin u(t). \end{array}\right.$$

On désigne par $(C)$ la trajectoire de $N$.

**1.** Démontrer que la projection orthogonale de (C) sur le plan (P) défini au B. 3. b. est un cercle, que l'on précisera.

**2.** Quelles sont les coordonnées, à l'instant $t$, du point $W(N)$ ? En déduire que, à tout instant $t$ $\left(t \in \mathbb{R}_+^\star\right)$, $W(N)$ est un point de (C).

**3.** Déterminer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ et le vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma(t)}$ du point mobile $N$ à l'instant $t$.

**4.** Étudier le sens de variation de la fonction numérique qui, au réel strictement positif, $t$ associe $\left\|\overrightarrow{V(t)}\right\|$.