Baccalauréat C Nantes juin 1979

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Soit f l?application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = z^3 + (-7+3\text{i})z^2 + (12-16\text{i})z + 4(1+7\text{i}).$$

On considère

$$E = \{z\ ;\ z \in \mathbb{C},\quad f(z) = 0\}.$$

1. Montrer que E contient un élément de la forme $z_0 = \lambda\text{i}$ où λ est un réel.
2. Déterminer les éléments z_0, z_1, z_2, de E : on notera z_1 l'élément de E, autre que z_0, qui a une même partie imaginaire que z_0.
3. Soit A, B, C les images respectives de z_0, z_1, z_2 dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.

   Déterminer les éléments de la similitude directe qui transforme le bipoint (A, B) en le bipoint (A, C).

EXERCICE 2 **4 POINTS**

1. Soit deux urnes U_1 et U_2 ; la première contient 6 boules blanches et 4 boules noires ; la seconde contient 8 boules blanches et 2 boules noires.

   D'une des deux urnes, choisie au hasard (il y a équiprobabilité pour ce choix), on extrait une boule que l'on remet dans l'urne :

   si la boule était blanche on recommence le tirage dans la même urne ;

   si la boule était noire on recommence le tirage dans l'autre urne.

   Cette règle est appliquée à chaque tirage et l'on suppose qu'à l'intérieur de chaque urne les tirage sont équiprobables.

   Soit P_n la probabilité pour que le n-ième tirage se fasse dans l'urne U_1 $\left(n \in \mathbb{N}^\star\right)$.

   a. Déterminer P_1.

   b. Déterminer P_2 : on se rappellera que le second tirage s'est fait dans U_1 soit parce que le premier tirage a été d'une boule blanche dans U_1, soit parce que le premier tirage a été d'une boule noire dans U_2.

   c. Démontrer qu'il existe une relation de récurrence vérifiée par la suite (P_n), de la forme :

   $$\forall n,\quad n \geqslant 2 :\quad P - n = aP_{n-1} + b$$

   où a et b sont des réels que l'on déterminera.

2. Soit la suite réelle (u_n), dont le terme général est défini pour tout n entier strictement positif par

   $$\left\{\begin{array}{lcl} u_1 & = & \dfrac{1}{2} \\ un & = & \dfrac{2}{5}u_{n-1} + \dfrac{1}{5} \quad \forall n,\ n \geqslant 2 \end{array}\right.$$

   a. Déterminer le réel α tel que le suite (V_n), dont le terme général est défini pour n entier strictement positif par $V_n = u_n - \alpha$ soit une suite géométrique.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente ; trouver alors la limite de P_n quand n tend vers l'infini.

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients réels. Si A et B appartiennent à $\mathscr{E}$ et si ? est un réel, on note A + B la somme des matrices A et B

A × B le produit de la matrice B par la matrice A dans cet ordre

$\lambda\cdot$ A le produit de la matrice A par le réel ?.

On rappelle que $(\mathscr{E}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que $(\mathscr{E}, +, \times)$ est un anneau unitaire, non commutatif, non intègre.

Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices de la forme

$$M(a\,;\,b) = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$$

où a et b sont des réels.

1. Démontrer que $(\mathscr{M},\ +,\ .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Préciser la dimension et une base de cet espace vectoriel.
2. Soit A = $M(1\,;\,0)$ et B = $M(0\,;\,1)$. Calculer A^2, B^2, A × B, B × A. En déduire que $(\mathscr{M},\ +,\ \times)$ est un anneau unitaire, commutatif. Cet anneau est-il intègre ?
3. Soit $\mathscr{M}_1$ l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathscr{M}$.
   a. Déterminer $\mathscr{M}_1$.
   b. Quelle est la structure de $(\mathscr{M}_1, \times)$?

Partie B

Soit π un plan vectoriel et $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{\imath}\,,\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ une base de ce plan.

On considère $\varphi_{a,\,b}$ l'endomorphisme de π dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est $M(a,\ b)$.

1. Déterminer, suivant les valeurs de a et b, le noyau et l'image de $\varphi_{a,\,b}$.
   Dans chaque cas, on indiquera une base de ces espaces vectoriels, s'il en existe.
2. Déterminer les nombres réels k pour lesquels l'équation $\varphi_{a,\,b}\left(\overrightarrow{u}\right) - k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ (1)
   (dans laquelle le vecteur $\overrightarrow{u}$ de π est l'inconnue) admet d'autres solutions que le vecteur $\overrightarrow{0}$.
   On explicitera, pour chacune des valeurs de k trouvées, l'ensemble des solutions de (1).
3. On pose $\overrightarrow{I} = \overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$.
   Vérifier que $\mathscr{B}' = \left(\overrightarrow{I}\,,\ \overrightarrow{J}\right)$ est une base de π. Quelle est la matrice M de $\varphi_{a,\,b}$ dans $\mathscr{B}'$?
4. Déterminer les applications $\varphi_{a,\,b}$ qui sont des projections vectorielles.
   Dans chacun des cas, on précisera les éléments caractéristiques de la projection trouvée en remarquant, le cas échéant, s'il s'agit ou non de sous-espaces vectoriels propres.
5. Déterminer les applications $\varphi_{a,\,b}$ qui sont des automorphismes involutifs.
   Dans chacun des cas, on précisera les éléments caractéristiques de l'involution trouvée.

Partie C

Soit P un plan affine associé à π, et soit O un point de P. On note respectivement $(\mathscr{R})$ et $(\mathscr{R}')$ les repères cartésiens $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ et $\left(\text{O}\,;\ \vec{I},\ \vec{J}\right)$.

Soit O$'$ le point de coordonnées $(2\,;\ -2)$ dans $(\mathscr{R})$. Soit f l'application affine de P dont l'endomorphisme associé est $\varphi_{\frac{1}{2},\,0}$ et qui transforme O en O$'$.

1. Définir la nature de f et donner ses éléments caractéristiques.

2. Si M a pour coordonnées $(x\,;\ y)$ dans (R), donner les coordonnées $(X\,;\ Y)$ dans $(\mathscr{R})$ de $f(M)$.

3. Si M a pour coordonnées $\left(x'\,;\ y'\right)$ dans $(\mathscr{R})$, donner les coordonnées (X?; Y?) de $f(M)$ dans $(\mathscr{R}')$.

Partie D

On suppose maintenant que π est euclidien et que la base $(\mathscr{B})$ est orthonormée.

Soit O$''$ le point de coordonnées $(1\,;\,1)$ dans $(\mathscr{R})$.

Soit g l'application affine de P dont l'endomorphisme associé est $\varphi_{\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}}$ et qui transforme O en O$''$.

1. **a.** Définir la nature de g et donner ses élément caractéristiques.

b. Si M a pour coordonnées $(x\,;\ y)$ dans $(\mathscr{R})$, donner les coordonnées $(\xi\,;\ \eta)$ dans $(\mathscr{R})$ de $g(M)$.

2. Soit $(\mathscr{C})$ le sous-ensemble de P, d'équation dans $(\mathscr{R})$ $x^2+y^2-2x+2y+1=0$.

a. Donner une équation dans $(\mathscr{R})$ de l'image (Γ) de $(\mathscr{C})$ par g. Représenter sur un même dessin les ensembles (Γ) et $(\mathscr{C})$.

b. Démontrer qu'il existe une rotation unique, centrée sur la droite de direction $\vec{\imath}$ et passant par O, qui transforme $(\mathscr{C})$ en (Γ). Déterminer les éléments caractéristiques de cette rotation.