∽ Baccalauréat C Nantes juin 1981 ∾

EXERCICE 1

Soit $\mathbb{N}^\star$ l'ensemble des entiers naturels non nuls. On considère, lorsque n appartient à $\mathbb{N}^\star$, les deux entiers a et b :

$$a = 11n+3 \quad ; \quad b = 13n-1.$$

1. Démontrer que tout diviseur de a et b est un diviseur de 50.
2. Résoudre pour $x \in \mathbb{N}^\star$, $y \in \mathbb{N}^\star$, l'équation :

$$50x - 11y = 3.$$

   En déduire les valeurs de n pour lesquelles les nombres a et b ont 50 pour plus grand commun diviseur.
3. Pour quelles valeurs de n, les nombres a et b ont-ils 25 pour plus grand commun diviseur ?

EXERCICE 2

Le plan affine $\mathscr{P}$ étant rapporté au repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On désigne par A et B les points de $\mathscr{P}$ de coordonnées respectives (1, 0) et (0, 1) dans ce repère.
À tout point M de coordonnées $(x ; y)$ dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on lui associe, lorsqu'il existe, le barycentre M' des points O, A, B, affectés respectivement des coefficients 1, x, y. On définit ainsi une fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathscr{P} & \to & \mathscr{P} \\ M & \longmapsto & M'. \end{array}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{E}$ de f.
2. Déterminer l'image de $\mathscr{E}$ par f.
3. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que $f(M) = M$.

PROBLÈME

Dans tout le problème, λ désigne un nombre réel positif non nul.
Soit e_1 et e_2 les fonctions numériques définies par :

$$e_1: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{\lambda}\cos x \end{array} \quad \text{et} \quad e_2: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{\lambda}\sin x. \end{array}$$

Soit E l'espace vectoriel engendré par e_1 et e_2.
Soit Φ l'application de E $\times$ E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (f,\ g) \in \text{E}^2 = \Phi(f,\ g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{e}^{-2\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que Φ est un produit scalaire et que (el' el) est une base orthonormée de E pour Φ. Dans toute la suite du problème E est muni de la structure d'espace vectoriel euclidien associée à Φ et est orienté en considérant $(e_1,\ e_2)$ comme une base directe.

2. À toute fonction f de E on associe la fonction $D(f)$ définie par

$$\forall x,\ x \in \mathbb{R},\quad D(f)(x) = f'(x)$$

où f' désigne la fonction dérivée de f.

Démontrer que, pour tout f de E, $D(f)$ appartient à E et que l'application D ainsi définie est un endomorphisme de E.

Déterminer la matrice de D dans la base $(e_1,\ e_2)$. Démontrer que D est le produit d'une rotation vectorielle et d'une homothétie vectorielle et d'une homothétie vectorielle de rapport un réel strictement positif que l'on déterminera.

En déduire que D est inversible.

3. À toute fonction f de E, on associe la fonction $T(f)$ définie par

$$\forall x,\ x \in \mathbb{R},\quad T(f)(x) = \int_x^{x+\pi} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démontrer que $T(f)$ appartient à E et que l'application :

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathrm{E} & \to & \mathrm{E} \\ & f & \longmapsto & T(f) \end{array}$$

est un endomorphisme de E.

Calculer $(T \circ D)(e_1)$, $(T \circ D)(e_2)$.

Déduire des résultats précédents que D^{-1} est la composée de T et d'une homothétie vectorielle de rapport k qu'on déterminera.

4. On note T^n et D^n les endomorphismes définis par :

$$\begin{array}{lll} T^0 = \mathrm{I}; & \forall n,\ n \in \mathbb{N}, & T^{n+1} = T^n \circ T \\ D^0 = \mathrm{I}; & \forall n,\ n \in \mathbb{N}, & D^{n+1} = D^n \circ D \end{array}$$

On note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire Φ.

Soit f un élément de E.

a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par

$$u_n = \left\|D^n(f)\right\|.$$

Cette suite est-elle convergente ?

b. Soit g la fonction :

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{e}^{\pi x} + 1 - \sqrt{x^2+1}. \end{array}$$

Démontrer que g est croissante sur $\mathbb{R}_+$. En déduire que $g(x)$ est strictement positif pour tout x positif.

c. En déduire la nature de la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

5. À tout élément $f = ae_1 + be_2$ de E, où a et b sont des nombres réels, on associe le nombre complexe $a + \mathrm{i}b$.

a. Calculer le nombre complexe associé à $D(f)$ à partir de celui associé à f.

b. Calculer le nombre complexe associé à $T(f)$ à partir de celui associé à f.

c. En déduire une explication des résultats obtenus pour D et T au cours des questions 2, 3 et 4.