Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1982 Nantes

EXERCICE 1 **4 points**

Une urne contient neuf jetons numérotés de 1 à 9, indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément deux jetons de l'urne et on note leurs numéros : a et b. On suppose qu'il y a équiprobabilité de sortie pour chaque jeton. On considère la variable aléatoire X associant à chaque paire de jetons tirés, $a,\ b$, le plus grand commun diviseur de a et de b.
   a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
   b. Déterminer la loi de probabilité de X et sa fonction de répartition. On représentera graphiquement celle-ci dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   c. Déduire de la question précédente les probabilités des **évènements** suivants :
   A : « l'équation $(x,\ y) \in \mathbb{Z}^2$ et $ax + by = 1$ admet des solutions »,
   B : « l'équation $(x,\ y) \in \mathbb{Z}^2$ et $ax + by = 2$ admet des solutions »,
   C : « l'équation $(x,\ y) \in \mathbb{Z}^2$ et $ax + by = 12$ admet des solutions ».
2. On effectue maintenant l'épreuve suivante : on tire une paire de jetons, on note a et b, on remet les jetons dans l'urne, on effectue un nouveau tirage, et ainsi de suite.
   a. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois fois 1 pour plus grand commun diviseur de a et de b au cours de quatre tirages successifs ?
   b. Combien faut-il effectuer de tirages pour que la probabilité d'avoir au moins une fois 1 pour plus grand commun diviseur de a et de b au cours de n tirages successifs soit supérieure à $0,999$?

EXERCICE 2 **4 points**

Soit E_3 l'espace affine euclidien orienté, rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

1. f désigne l'application affine de E_3 définie analytiquement par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' &=& \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y \\ z' &=& z. \end{array}\right.$$

   Démontrer que f est une rotation affine ; préciser son axe et une mesure de son angle.
2. On considère les quatre points :

$$\text{A}(2\ ;\ 0\ ;\ 0),\quad \text{B}(-1\ ;\ \sqrt{3}\ ;\ 0),\quad \text{C}(-1\ ;\ -\sqrt{3}\ ;\ 0),\quad \text{D}(0\ ;\ 0\ ;\ 4)$$

   On pose $\mathscr{F} = \{\text{A}, \text{B}, \text{C}, \text{D}\}$.
   a. Vérifier que ABC est un triangle équilatéral de centre de gravité O.
   b. Vérifier que l'application f laisse $\mathscr{F}$ globalement invariant.
3. Soit g une isométrie affine de E_3 qui laisse $\mathscr{F}$ globalement invariant.

a. Déterminer l'isobarycentre G des quatre points A, B, C, D. Calculer

$$\left\|\overrightarrow{\text{GA}}\right\|, \quad \left\|\overrightarrow{\text{GB}}\right\|, \quad \left\|\overrightarrow{\text{GC}}\right\|, \quad \left\|\overrightarrow{\text{GD}}\right\|.$$

b. En déduire que g laisse invariant les points G et D.

c. En déduire l'ensemble des déplacements de E_3 qui laissent $\mathscr{F}$ globalement invariant.

4. Soit s un antidéplacement de E_3 qui laisse $\mathscr{F}$ globalement invariant.

a. Démontrer que s est associé à une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à un plan vectoriel ; en déduire la nature géométrique de s.

b. Quel est l'ensemble des isométries affines de E_3 qui laissent $\mathscr{F}$ globalement invariant ?

PROBLÈME **12 points**

Sauf pour les notations, les trois parties du problème sont indépendantes

P est un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$; $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes ; i est le nombre de complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$. Les affixes des points de P sont toujours données par rapport au repére $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$.

f et g sont les deux applications de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ définies par, pour tout z de $\mathbb{C}$,

$$\begin{array}{rcl} f(z) & = & z^3+4(1-\text{i})z^2-2(2+7\text{i})z-16+8\text{i} \\ g(z) & = & z^3+2-2\text{i}. \end{array}$$

Partie A

1. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z vérifiant $g(z)=0$. Représenter les points dont les affixes sont les nombres trouvés et démontrer que ces points forment un triangle équilatéral.

2. Démontrer qu'il existe un, et un seul, réel r, que l'on déterminera, qui vérifie $f(r)=0$.

Déterminer les deux nombres complexes a et b de faÁon à avoir

$$f(z)=(z-r)\left(z^2+az+b\right) \text{ pour tout } z \text{ de } C.$$

3. Résoudre l'équation $z\in\mathbb{C}, \quad f(z)=0$.

Démontrer que les points dont les affixes sont les solutions de cette équation forment un triangle rectangle dans le plan P.

4. A, B, C sont les points de P dont les affixes respectives sont $-1+3\text{i}$, $1+\text{i}$, -4. Déterminer l'affixe du barycentre G des points A, B, C affectés respectivement des coefficients 4 ; 3 ; 5.

5. On désigne par h l'application de P vers $\mathbb{R}$ qui à tout point M de P associe le réel

$$\overrightarrow{M\text{A}}\cdot\overrightarrow{M\text{B}}+2\,\overrightarrow{M\text{B}}\cdot\overrightarrow{M\text{C}}+3\,\overrightarrow{M\text{C}}\cdot\overrightarrow{M\text{A}}.$$

Calculer $h(\text{C})$. Exprimer $h(M)$ en fonction de $\|M\text{G}\|^2$ et $h(\text{G})$.

Déterminer et dessiner l'ensemble des points M de P qui vérifient $h(M)=18$.

Partie B

À tout point M de P d'affixe z on associe le point M' de P d'affixe

$$f(z)-g(z).$$

1. Déterminer les coordonnées $\left(x' ; y'\right)$ de M' dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ en fonction des coordonnées $(x ; y)$ de M dans le même repère.
2. A, B, C sont les points définis en A 4. Donner une équation de l'ensemble H_1 des points M de P tels que O, B et M' soient alignés. Démontrer que H_1 est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes.
3. Donner une équation de l'ensemble H_2 des points M de P tels que O, I et M' soient alignés, I étant le centre de gravité de A, B, C.

   Démontrer que H_2 est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes : on pourra, par exemple, donner une équation de H_2 sous la forme $y = \varphi(x)$.
4. Démontrer qu'un point M est commun à H_1 et H_2 si, et seulement si, M' est confondu avec O. Résoudre l'équation

$$z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = g(z).$$

   En déduire les points communs à H_1 et H_2.
   Construire H_1 et H_2 dans le repére $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Partie C

Un mobile du plan P a son affixe $z(t)$ donnée, en fonction du temps t par

$$z(t) = f(t.\text{i}) + 10 - 6\text{i},$$

quand t décrit l'intervalle $[0 ; 2]$ de $\mathbb{R}$. On notera $M(t)$ le point correspondant à l'instant t.

1. Déterminer les coordonnées $(x(t) ; y(t))$ de $M(t)$ dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$, ainsi que les coordonnées dans la base $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ des vecteurs vitesse et accélération du mobile à l'instant t.
2. Faire un tableau indiquant les variations de x et de y en fonction de t.
3. Construire les points de la trajectoire du mobile correspondant aux valeurs : 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{7}{4}$, 2 du réel t et un vecteur directeur des tangentes à la trajectoire pour les valeurs 0, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{4}$, 2 de t.
4. Déduire de ce qui précéde le tracé de la trajectoire du mobile, en indiquant le sens du parcours, quand t décrit $[0 ; 2]$.