∽ Baccalauréat C Nantes juin 1983 ∾

EXERCICE 1 **3 POINTS**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = 1$; les solutions seront données sous forme trigonométrique ; les représenter dans le plan complexe.
2. Démontrer que la somme des solutions est nulle.
3. En déduire que :

$$\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}.$$

4. Exprimer $\cos\frac{4\pi}{5}$ en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$, puis calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Soit P un plan affine euclidien ;
ABC est un triangle équilatéral ;
On note MN la distance euclidienne des points M et N et $a = \text{AB}$.

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M de P tels que :

$$2a2 \leqslant 2\text{AM}^2 + \text{BM}^2 + \text{CM}^2 \leqslant 3a^2.$$

2. Pour $k \in \mathbb{R}$ on considère l'ensemble :

$$\Delta_k = \{M / M \in \text{P}, \quad (2\overrightarrow{\text{MA}} + \overrightarrow{\text{MB}} + \overrightarrow{\text{MC}}) \cdot (\overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AC}}) = k\}.$$

   a. Déterminer Δ_k et tracer Δ_k pour $k = 3a^2$.
   b. Considérons $(\mathscr{E})$ l'ellipse de centre G barycentre du système $\{(\text{A},\ 2), (\text{B},\ 1), (\text{C},\ 1)\}$ dont Je grand axe est porté par la médiatrice de BC et est égal à $a\frac{\sqrt{7}}{2}$ et dont le petit axe vaut $a\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   Déterminer les réels k pour que Δ_k soit l'une des directrices de l'ellipse $(\mathscr{E})$.

PROBLÈME (EXTRAIT) **12 POINTS**

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

On rappelle que l'ensemble $\mathscr{F}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
On désigne par E le sous-ensemble de $\mathscr{F}$ constitué par les fonctions numériques f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la propriété :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 4f''(x) - 4f'(x) + f(x) = 0$$

f' et f'' désignant les fonctions dérivées première et seconde de f.

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$.
2. Soit a un nombre réel. Démontrer que la fonction qui à x associe e^{ax} appartient à E si et seulement si $a = \frac{1}{2}$.

3. Soit f une fonction numérique deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que f appartient à E si et seulement si la fonction numérique g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} f(x)$$

vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 0.$$

En déduire que E est l'ensemble des fonctions $f_{a,\,b}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{a,\,b}(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$$

a et b étant deux réels arbitraires.

Démontrer que $\left(f_{1,\,0}\ ;\ f_{0,\,1}\right)$ est une base de E. Quelles sont les coordonnées de $f_{a,\,b}$ dans cette base ?

4. On pose $\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E}, \quad f(0) = 0\}$ $\quad \mathrm{G} = \{f \in \mathrm{E}, \quad f'(0) = 0\}$.

Démontrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Donner une base de chacun d'eux.

5. Soient u et v les éléments de E définis par :

$$\begin{array}{lcl} \forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x) & = & x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\ ; \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad v(x) & = & \left(-\dfrac{x}{2}+1\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}. \end{array}$$

Démontrer que $(u,\ v)$ est une base de E et que le système de coordonnées d'un élément f de E dans cette base est $\left(f'(0),\ f(0)\right)$.

En déduire que, pour tout couple de réels α et β, il existe un unique élément f de E tel que $f'(0) = \alpha$ et $f(0) = \beta$.

6. Étudier les variations des fonctions u et v et tracer leurs courbes représentatives dans un même repère orthonormé du plan. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de ces deux courbes.

On désigne par λ un réel strictement négatif ; calculer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ de la région du plan limitée par les deux courbes tracées et par les droites d'équation $x = \lambda$ et $x = \dfrac{2}{3}$.

Cette aire admet-elle une limite quand λ tend vers $-\infty$?

Partie B

On appelle $\mathscr{S}$ l'espace vectoriel réel constitué par toutes les suites numériques définies sur $\mathbb{N}$. La suite de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, sera notée (u_n).

Soit E$'$ le sous-ensemble de $\mathscr{S}$ constitué par les suites (u_n) vérifiant la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n = 0 \qquad (1).$$

1. Démontrer que E$'$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}$.

Soit (u_n) une suite géometrique de premier terme u_0 non nul et de raison q non nulle ; démontrer que (u_n) appartient à E$'$ si et seulement si $q = \dfrac{1}{2}$.

2. **a.** Démontrer qu'une suite (u_n) appartient à E$'$ si et seulement si la suite de terme général $\lambda_n = u_n 2^n$ est une suite arithmétique.

b. En déduire que E′ est l'ensemble des suites dont le terme général s'écrit :

$$u_n = (an+b)2^{-n}$$

a et b étant deux nombres réels arbitraires ; déterminer la dimension de E′.

3. a. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0~;~1\}, 2^n > \text{C}_n^2.$$

(On rappelle que $\text{C}_n^2 = \dfrac{n!}{2!(n-2)!}$).

b. En déduire que la suite de terme général $\dfrac{n}{2^n}$ converge vers 0.

c. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n) de terme général général $(an+b)2^{-n}$, a et b étant deux réels arbitraires.

d. On pose :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

En utilisant la propriété (1), établir que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$S_n = 4\left(u_1 - u_{n+2}\right).$$

En déduire la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.