∽ Baccalauréat C Nantes septembre 1980 ∾

I.

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté dont $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est une base orthonormée directe. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine associé à E, rapporté au repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère l'application affine f de $\mathscr{E}$ dans lui-même, qui au point M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ associe le point M' de coordonnées $\left(x'\,;\,y'\,;\,z'\right)$ définies par

$$\left\{\begin{array}{l c l}
x' &=& \frac{1}{3}(2x - y + 2z + 5)\\
y' &=& \frac{1}{3}(2x + 2y - z + 2)\\
z' &=& \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z + 2).
\end{array}\right.$$

1. Démontrer que l'endomorphisme φ associé à f est une rotation vectorielle dont on précisera l'axe D.

2. Soit A le point de coordonnées $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$ et $\mathrm{A}' = f(\mathrm{A})$.

- **a.** Quelle est l'image par f de la droite (AA') ?
- **b.** Montrer que f est un vissage dont on déterminera les éléments.

II.

On associe à tout nombre complexe son image dans un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé.

1. Déterminer les nombres complexes z tels que z^2, z^3, z^4 aient des images deux à deux distinctes.

2. Démontrer que si z, z^2, z^3, z^4, ont des images distinctes situées sur un cercle C, z^2, z^3, z^4, z^5 ont des images situées sur un cercle C'. Comparer les rayons de ces cercles.

3. En déduire l'ensemble des nombres complexes z tels que z, z^2, z^3, z^4 aient des images situées sur un cercle.

III.

Partie A

On considère la fonction f :1R -+IR x 1 1–+—' x2 - 1

1. **a.** Étudier les variations de f

- **b.** Soit P un plan affine euclidien rapporté au repère -+ -+ -+ orthonormé (01 ; i , j), le vecteur i dirigeant l'axe des abscisses. Tracer la courbe Cl représentative de f dans ce repère ; on prendra 2 centimètres comme unité sur les axes.

2. Trouver les nombres réels a et b tels que –=1- -+-. *abx*2−1*x*−1*x*+1, *xEIR*, [*x*] = *F*1, *SoithunnombreréeldeJO*, 1[.

3.

- **4.** Montrer que f est intégrable sur [- h, hl
- **5.** Calculer, en centimètres carrés, l'aire d(h) de l'ensemble . des points M de P dont les coordonnées x et y dans (01 ; vérifient - h :s ; ; x :s ; ; h et f(x) :s ; ; y :s ; ; O. d(h) admet-elle limite lorsque h tend vers 1 ?

Soit n un entier naturel non nul ; on note f(n) la fonction dérivée d'ordre n de [:

1. Démontrer, en utilisant la 2" question, -qu'il existe polynôme Qn' de degré n, à coefficients réels tel que , x E IR, [x] =F 1, f(n)(x) = $(_{l})n\,Qn(x)2(x2_{1})n+1 Déterminer l'ensembledesnombrescomplexesz$
O.

Partie B

On considère la fonction <p : IR -+ lx - 11 x 1–+ - Log – . 2 x + 1

1. **a.** Étudier les variations de <p.
   b. Tracer la courbe C2 représentative de <p dans un -+ -+ 02 ; i, j) de P distinct du précédent.
2. On désigne par la restriction de <p à J - 1, 1
   a. Démontrer, sans calcul, que admet une fonction réciproque, dont on précisera l'ensemble de définition.
   b. Déterminer -1.
3. **a.** Lorsque x et - appartiennent à l'ensemble de définition x de <p, calculer <p( ) en fonction de <p(x).
   b. Déterminer la fonction -1 0 <p.

Partie C

Soit P le plan vectoriel euclidien direction de P. On considère la fonction W
JO, + oo[-+ P -+ 1 1 + e2! -+ t 1–+ - e2! i + - Log I—Ij . 2 1 - el! On considère le mouvement du point M du plan P défini par la fonction .
JO, + oo[-+ P t 1–+ M avec (),)J = W(t).

1. Déterminer la trajectoire r du point M.
2. **a.** Calculer les coordonnées dans le repère (i, j) du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération du point M à l'instant t.
   b. Indiquer, en le justifiant, le sens du mouvement de M sur r.
3. **a.** Étudier les variations de la fonction IR -+ IR 9 X 1–+ 2 - 2X + 3X2 - X3
   b. En déduite qu'il existe to dans J Log 2, Log 3[tel que le mouvement de M soit accéléré dans JO, to [et retardé dans Jto, + ∞[.