∽ Baccalauréat C Nantes septembre 1972 ∽

EXERCICE 1

Résoudre, dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\overline{3}x+\overline{2}y &=& \overline{1},\\ \overline{1}x-\overline{1}y &=& \overline{2}.\end{array}\right.$$

EXERCICE 2

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x\,\mathrm{d}x$.

PROBLÈME

Partie A

On considère l'ensemble (E) des matrices 2×2, à coefficients réels, de la forme $\begin{bmatrix} a & b\\ b & c\end{bmatrix}$.

1. Démontrer que (E) muni de l'addition des matrices et de la multiplication par un scalaire est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. En préciser une base et donner la dimension de cet espace vectoriel.
2. Le sous-ensemble (E′) de (E) des matrices de la forme $\begin{bmatrix} a & b\\ b & -a\end{bmatrix}$ est-il un sous-espace vectoriel de (E) ?
3. Le sous-ensemble (E″) de (E) des matrices de la forme $\begin{bmatrix} a & b\\ b & -a\end{bmatrix}$ où les coefficients vérifient la relation $a^2 + b^2 = 1$ est-il un sous-espace vectoriel de (E) ?

Partie B

Soit (P) un plan vectoriel euclidien et $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ une base orthonormée de (P). On considère la transformation f_θ qui, à tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de (P), associe le vecteur $\overrightarrow{u'} = f_\theta\left(\overrightarrow{u}\right)$ de (P) ; dans la base $\mathscr{B}$, les composantes $(x\,;\,y)$ et $\left(x'\,;\,y'\right)$ respectivement de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{u'}$ sont liées par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& x\cos\theta + y\sin\theta,\\ y' &=& x\sin\theta - y\cos\theta,\end{array}\right. \quad \theta \in [0\,;\,2\pi[.$$

1. Démontrer que f_θ est une application linéaire et bijective de (P) dans (P) ; étudier $f_\theta \circ f_\theta$.
2. Former, relativement à la base $\mathscr{B}$, la matrice de l'application $f_\theta \circ f_\theta$.
   Démontrer que cette application est une rotation vectorielle, dont on précisera l'angle.
3. Au vecteur $\overrightarrow{u}$, de composantes $(x\,;\,y)$ dans la base $\mathscr{B}$, on associe le nombre complexe $z = x+\mathrm{i}y$; de même, on pose $z' = x' + \mathrm{i}y'$.
   Les relations entre x, y, x' et y' données en tête de ce chapitre définissent alors une transformation associée à f_θ, de l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes, soit F_θ.
   Démontrer que z' s'exprime, d'une façon simple, en fonction de $\overline{z}$, complexe conjugué de z.
   Démontrer que F_θ est le produit de deux transformations géométriques élémentaires.
   Quelle est la nature de f_θ ?

4. Au plan vectoriel (P) et à la base $\mathscr{B} = \left(\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$, on associe un plan affine $\mathscr{P}$ et un repère $\mathscr{R} = \left(\text{O}\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$ de $\mathscr{P}$. Au vecteur $\vec{u}$, de composantes $(x\ ;\ y)$ dans $\mathscr{B}$, on associe le point M de $\mathscr{P}$ ayant pour coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans $\mathscr{B}$; de même, au vecteur $\overrightarrow{u'} = f_\theta\left(\vec{u}\right)$ on associe le point $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ de $\mathscr{P}$. On suppose ici que θ est égal à $\dfrac{\pi}{3}$.
   Déterminer la courbe (H'), ensemble des points M' lorsque M décrit la courbe (H) dont l'équation est
$$x^2 - y^2 - 2\sqrt{3}xy - 8 = 0.$$
   Définir géométriquement (H) et donner ses éléments remarquables.

Partie C

Dans le plan vectoriel euclidien (P) rapporté à la base $\mathscr{B}$ précédente, on considère la transformation g_φ qui, au vecteur $\vec{u}\,(x\ ;\ y)$, associe le vecteur $g_\varphi\left(\vec{u}\right) = \vec{v}$ dont les composantes (X; Y) sont définies par
$$\left\{\begin{array}{lcl} X & = & x\cos^2\varphi + y\sin\varphi\cos\varphi,\\ Y & = & x\sin\varphi\cos\varphi + y\sin^2\varphi,\end{array}\right.\qquad \varphi \in [0\ ;\ 2\pi[.$$

1. Démontrer que g_φ est une application linéaire de (P) dans (P). Est-elle une bijection ?
2. Déterminer le noyau, N, de g_φ ; préciser la dimension de N et en donner une base.
3. Déterminer l'image Im de g_φ ; préciser la dimension de Im et en donner une base.
4. Soit $\vec{a}$ le vecteur $\vec{a} = \vec{\imath}\,\cos\varphi + \vec{\jmath}\,\sin\varphi$.
   Si $\vec{u}$ est un vecteur quelconque de (P), calculer les produits scalaires $\vec{u}\cdot\vec{a}$ et $g_\varphi\left(\vec{u}\right)\cdot\vec{a} = \vec{v}\cdot\vec{a}$.
   Quelle conclusion peut-on en tirer au sujet de la nature de g_φ ?