ൟ Baccalauréat C Nantes septembre 1973 ൟ

EXERCICE 1

On considère l'ensemble E des couples $(x\,;\ y)$ de $\mathbb{Z}^2$ vérifiant la relation

$$13x - 7y = 1.$$

1. Trouver un élément $(a\,;\ b)$ de E tel que a soit compris entre 0 et 7.
2. Décrire l'ensemble

$$\mathrm{E}' = \{(x - a\,;\ y - b) | (x\,;\ y) \in E\}.$$

3. Décrire E.
4. Décrire l'ensemble

$$F = \{(x\,;\ y) 1 (x\,;\ y) \in \mathbb{Z}^2 \quad \text{et} \quad 13x - 7y = 2\}.$$

EXERCICE 2

On considère l'application f de $[0\,;\,\pi]$ vers $\mathbb{R}$ qui, à tout x de $[0\,;\,\pi]$ associe

$$f(x) = \cos^2 x + \sin x.\cos x.$$

1. Étudier les variations de f et construire la courbe représentative de son graphe dans un plan affine euclidien P rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
2. Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe représentative, l'axe des abscisses et les droites d'équations cartésiennes $x = 0$, $x = \pi$.

EXERCICE 3

$\mathscr{P}$ est un plan vectoriel euclidien sur $\mathbb{R}$, rapporté à la base orthonormée $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
$(a\,;\ b)$ est un élément de $\mathbb{R}^2$. À ce couple de réels, on associe l'application linéaire de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ définie dans la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, par

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{F}\left(\overrightarrow{\imath}\right) & = & \left(b + \dfrac{a}{2}\right)\overrightarrow{\imath} + \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{\jmath} \\ \mathrm{F}\left(\overrightarrow{\jmath}\right) & = & \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{\imath} + \left(b - \dfrac{a}{2}\right)\overrightarrow{\jmath} \end{array}\right.$$

Au besoin, on précisera F en notant $\mathrm{F}_{(a\,;\,b)}$.

Partie A

1. On choisit $(a\,;\ b) = (-1\,;\,2)$ et l'application $\mathrm{F}_{(-1\,;\,2)}$ associée est notée simplement G.
   Démontrer que G est bijective.
   Rechercher l'ensemble (δ) des vecteurs de $\mathscr{P}$ invariants par G.
   Quel est le transformé par G d'un vecteur de la droite $\left(\Delta'\right)$ contenant le vecteur $\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}\sqrt{3}$?
   Quel est l'ensemble transformé de la droite vectorielle $\left(\Delta'\right)$?
   Définir géométriquement G.

2. Quel doit être le couple $(a\,;\,b)$ pour que $\text{F}_{(a\,;\,b)}$ ne soit pas bijective ?
   Dans ce cas, $\text{F}_{(a\,;\,b)}$ est notée simplement H.
   Déterminer le noyau de H, noté Ker H.
   Déterminer l'image de $\mathcal{P}$ par H, notée Im H.
   Ker H et Im H sont-ils des sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{P}$?
   Sont-ils des sous-espaces vectoriels orthogonaux de $\mathcal{P}$?
   Dans le cas particulier où a et b sont égaux à $\dfrac{1}{2}$ H est noté H_0 : démontrer que H_0 est la projection de $\mathcal{P}$ sur Im H_0 suivant Ker H_0.
3. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que $\text{F}_{(a\,;\,b)}$ soit bijective (automorphisme de $\mathcal{P}$) ?
   Déterminer l'ensemble des couples $(a\,;\,b)$ de $\mathbb{R}^2$ tels que $\text{F}_{(a\,;\,b)}$ soit un automorphisme involutif de $\mathcal{P}$; dans, ces cas $\text{F}_{(a\,;\,b)}$ est notée simplement J.
   Determiner, dans chacun de ces cas, les ensembles des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathcal{P}$ pour lesquels on obtient
   $$\text{J}\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u} \quad \text{et} \quad \text{J}\left(\overrightarrow{v}\right) = -\overrightarrow{v}.$$
4. Déterminer les couples $(a\,;\,b)$ de $\mathbb{R}^2$ pour lesquelles $\text{F}_{(a\,;\,b)}$ est une isométrie.
   Préciser les diverses transformations F ainsi obtenues.

Partie B

P est un plan affine euclidien associé à $\mathcal{P}$ et rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$. On appelle I le point de coordonnées (1 ; 2) dans ce repère.
Une droite d de P est définie par un de ses points, A, et un de ses vecteurs directeurs, $\overrightarrow{u}$.
$\overrightarrow{\text{OA}} = x_0\overrightarrow{\imath} + y_0\overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{\imath} + \beta\overrightarrow{\jmath}$ (avec $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$).
On note f au besoin $f_{(a,\,b)}$, l'application affine de P vers P associée à l'application linéaire $\text{F}_{(a\,;\,b)}$ de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ et vérifiant $f(\text{I}) = \text{I}$.

1. On choisit $(a\,;\,b) = (-1\,;\,2)$ et l'application $f_{(-1,\,2)}$ associée est notée simplement g.
   Démontrer que $g(d)$ est une droite de P ; déterminer un vecteur directeur de cette droite, ainsi que son équation cartésienne dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$.
   Déterminer l'ensemble δ des points de P invariants par g.
   Rechercher l'ensemble des droites d de P invariantes par g.
   Démontrer que, pour tout point M de P (dont la projection orthogonale sur δ est notée Q), est vérifiée la relation
   $$\text{G}\left(\overrightarrow{\text{QM}}\right) = 3\overrightarrow{\text{QM}}.$$
2. **a.** Déterminer tous les couples $(a\,;\,b)$ de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels la transformée d'une droite quelconque de P est une droite de P.
   b. Déterminer tous les couples $(a\,;\,b)$ de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels la transformée d'une droite quelconque de P est réduite à un unique point.
   c. Dans les cas différents des deux précédents, rechercher celles des .droites de P qui se transforment en une droite de P.
   d. Déterminer, dans les cas où cela est possible, les droites de P telles que d et $f(d)$ soient deux droites parallèles.