Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C septembre 1975 Nantes ∾

EXERCICE 1

Soit la fonction f qui, à tout x réel, associe

$$f(x) = (1 - x + |x|)\mathrm{e}^{x}.$$

1. **a.** Simplifier l'écriture de $f(x)$ dans chacun des deux cas :

$$x \geqslant 0, \qquad x < 0$$

   b. La fonction f est-elle continue au point 0 ?

   c. Calculer le nombre dérivé de f pour tout x strictement négatif.

   d. Déterminer la limite de $\dfrac{f(x) - 1}{x}$ lorsque x tend vers zéro.
   La fonction f est-elle dérivable au point zéro ?

2. Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

EXERCICE 2

Soit P un plan vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormé $\left(\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
Soit f l'endomorphisme de P qui, à tout vecteur $\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ de P, associe le vecteur

$$\vec{v'} = f\left(\vec{v}\right) = (x + ay)\vec{\imath} + by\vec{\jmath}$$

où a et b sont deux réels donnés.
Déterminer suivant les valeurs de a et b le noyau et l'image de cet endomorphisme. À quelle condition est-il bijectif?
Pour quelles valeurs de a et b l'endomorphisme f est-il une isométrie vectorielle? Préciser la nature des isométries trouvées.

PROBLÈME

Partie A

Décrire l'ensemble

$$\left\{(x~;~y)(x~;~y) \in \mathbb{Z}^2 \quad \text{et} \quad y(2 - x) = x\right\}$$

Partie B

1. Étudier la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{x}{2 - x}$$

   Représenter graphiquement cette fonction dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O},~\vec{e_1},~\vec{e_2}\right)$: on appellera (H) la courbe obtenue.
   Retrouver par une discussion graphique les résultats du 1.

2. **a.** Démontrer qu'on peut définir une suite réelle (u_n), $n \in \mathbb{N}^\star$, par la donnée de son premier terme u_1 choisi sur $[0;\ 1]$ et par la relation de récurrence $u_n = f\left(u_{n-1}\right)$ (pour $n \geqslant 2$), f étant la même fonction qu'à la question précédente.

   b. Évaluer u_2, u_3, u_4, en fonction de u_1 et trouver par récurrence l'expression de u_n en fonction de u_1 ; étudier les cas particuliers $u_1 = 0$ et $u_1 = 1$.
   Déterminer la limite de u_n lorsque n croît indéfiniment.

3. On effectue un changement de repère dans le plan P de telle sorte que le point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère orthonormé $\mathcal{R}$ ait pour coordonnées

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-y-3)\\ y' & = & \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y-1)\end{array}\right.$$

   dans le nouveau repère $\mathcal{R}'$.
   Écrire l'équation de la courbe (H) dans le nouveau repère $\mathcal{R}' = \left(\text{O}',\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$. Quelle est la nature de (H) ? Quels en sont les éléments remarquables ?

4. Démontrer que le repère $\mathcal{R}'$ est le transformé du repère $\mathcal{R}$ par une application f de P dans P qui est la composée $(f = r \circ t)$ d'une translation t et d'une rotation r.
   Quelle est l'application f ?

Partie C

1. On considère l'application φ de $\mathbb{C} - \{2\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\varphi(z) = \frac{z}{2-z}.$$

   Quelle est son image $\mathbb{C}'$?
   On considère l'application f de $\mathbb{C} - \{2\}$ sur $\mathbb{C}'$ qui, à z associe $f(z) = \dfrac{z}{2-z}$.
   Démontrer que f est injective.

2. On pose $z = x + \text{i}y$ et $f(z) = X + \text{i}Y$.
   Soit M l'image de z dans le plan P rapporté au repère $\mathcal{R} = \left(\text{O},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$ l'application de P dans P qui à tout point M, d'affixe z, associe M' d'affixe $f(z)$ sera notée F.
   Calculer X et Y en fonction de x et y.
   Déterminer l'ensemble des points du plan P dont les images par F appartiennent :

   a. à la droite $\left(\text{O},\ \overrightarrow{e_1}\right)$

   b. à la droite $\left(\text{O},\ \overrightarrow{e_2}\right)$

3. Réciproquement, quelles sont les images par F

   a. de la droite $\left(\text{O},\ \overrightarrow{e_1}\right)$ privée de A$(2\,;0)$?

   b. de la droite $\left(\text{O},\ \overrightarrow{e_2}\right)$?

4. Pour tout z, complexe différent de 2, évaluer le produit

$$|z-2|\ \cdot |f(z)+1|$$

   et déterminer arg $[f(z)+1]$ en fonction de arg $(z-2)$.

5. En utilisant la question précédente, déterminer les images par F

   a. du cercle dont le centre est A $(2\,;\,0)$ et dont le rayon R est non nul.

   b. du complément de $\{$A$\}$ dans une droite passant par A.

N. B. - Les trois parties A, B, C du problème sont indépendantes.