

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Nantes septembre 1975 ∞

EXERCICE 1

Soit $Z/15\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers modulo 15 dont on désignera les éléments par $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{14}$. Résoudre dans $Z/15\mathbb{Z}$

1. l'équation $\bar{5}x = \bar{0}$;
2. l'équation $\bar{3}x = \bar{0}$;
3. le système

$$\begin{cases} \bar{8}x + \bar{2}y = \bar{11} \\ \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{11} \end{cases}$$

EXERCICE 2

1. Soit n un nombre entier positif.

Démontrer que $\frac{1}{x^n}e^{-\frac{1}{x}}$ a une limite nulle quand x tend vers zéro avec $x > 0$. (On fera le changement de variable défini par $t = \frac{1}{x}$.)

2. Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{|x|}}, \quad \forall x, x \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

Cette fonction est-elle continue en tout point de \mathbb{R} ?

Est-elle dérivable en tout point de \mathbb{R} ? (Pour la dérivabilité à l'origine, on étudiera $f(x)$ quand x tend vers zéro).

Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative (\mathcal{C}) dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox, y'Oy$.

3. Soit m un nombre réel, $m > 1$.

Calculer l'aire $\mathcal{A}(m)$ de la partie du plan limitée par la Courbe (\mathcal{C}), l'axe des abscisses $x'Ox$ et les droites d'équation $x = \frac{1}{m}$ et $x = m$: on calculera d'abord la dérivée de $e^{-\frac{1}{x}}$ ($x \neq 0$), puis on fera une intégration par parties. Déterminer la limite de $\mathcal{A}(m)$ quand m tend vers $+\infty$.

PROBLÈME

N. B. : Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

Partie A

On désigne par \mathcal{D} un plan vectoriel euclidien orienté dont (\vec{u}, \vec{v}) est une base orthonormée directe, et on considère l'endomorphisme f de \mathcal{D} défini par sa matrice M_f relativement à la base (\vec{u}, \vec{v}) :

$$M_f = \begin{pmatrix} a\sqrt{3} & -a+b \\ a+b & a\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

où a et b sont deux paramètres réels.

1. À quelle condition nécessaire et suffisante l'application f est-elle bijective?
2. Déterminer, suivant les valeurs de a et b , le noyau $\text{Ker } f$ et l'image $\text{Im } f$ de cet endomorphisme.
3. Démontrer que l'ensemble des vecteurs de \mathcal{P} invariants par f est une droite vectorielle D si, et seulement si, les paramètres a et b vérifient la relation

$$(1) \quad 4a^2 - 2a\sqrt{3} + 1 - b^2 = 0.$$

4. Déterminer les couples $(a; b)$ vérifiant la relation (1) et tels que f ne soit pas une bijection. Pour chacun de ces couples $(a; b)$, préciser le noyau et l'image de f ainsi que la droite vectorielle D des vecteurs invariants par f puis, en déduire la nature de l'endomorphisme f .
5. Dans cette question on suppose $b = 0$ et $a \neq 0$.
Établir que f est alors le produit d'une rotation vectorielle et d'une homothétie de rapport positif. (On précisera, suivant la valeur de a , le rapport k de l'homothétie et une détermination θ de l'angle de rotation).

Partie B

Soit P le plan affine euclidien orienté dont $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct.

On rappelle que l'application de \mathbb{C} dans P qui, à tout nombre complexe z de composantes x et y par rapport à la base $(1, i)$ de \mathbb{C} ($i^2 = -1$), associe le point M de coordonnées x et y par rapport au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ de P , est une bijection; z est appelé l'afixe de M et M est le point image de z .

On rappelle aussi que, à toute application t de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , on peut associer l'application T de P dans P telle que, si z est l'afixe de m et Z l'afixe de M , on ait

$$T(m) = M \iff t(z) = Z.$$

Enfin on notera \bar{z} le conjugué de nombre complexe z .

1. On désigne par s l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par

$$Z = s(z) = a(\sqrt{3} + i)z$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$, a étant un paramètre réel non nul.

Soit S l'application de P dans P associée à s .

- a. Étudier, suivant la valeur du paramètre réel a , la nature de S et préciser ses éléments.
- b. Déterminer, si elle existe, l'application t^{-1} .
- c. Déterminer et construire l'ensemble C des points du plan dont l'afixe z vérifie la relation

$$z\bar{z} + i(z - \bar{z}) - 3 = 0.$$

On désigne par C' l'ensemble des images des points de C par l'application S . Écrire la relation qui lie les affixes des points de C' et construire C' pour $a = 2$.

2. On considère l'application φ de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par

$$Z = \varphi(z) = ibz$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$, où b est un paramètre réel non nul.

Soit Φ l'application de P dans P associée à φ .

- a. Étudier, suivant les valeurs de b , la nature de Φ .

- b.** Déterminer et construire l'ensemble Γ des points du plan dont l'affixe z vérifie la relation

$$(z + \bar{z})^2 - 4(z - \bar{z})^2 = 64.$$

En choisissant $b = 2$, déterminer et construire l'ensemble Γ' des images des points de Γ par l'application Φ .