

❧ Baccalauréat C Nantes juin 1978 ❧

EXERCICE 1

3 POINTS

Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation suivante d'inconnue x :

$$3x^2 + 4x \equiv 0 \pmod{21}.$$

EXERCICE 2

4 POINTS

Soit f l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par :

$$f(z) = z^3 + az^2 + bz - 42 + 24i.$$

où a et b sont des éléments de \mathbb{C} .

1. Déterminer a et b sachant que :

$$\begin{cases} f(1) &= -44 + 32i \\ f(-1) &= -30 + 16i. \end{cases}$$

2. On suppose, dans cette question, que : $a = 5$ et $b = -8 + 8i$.

Démontrer qu'il existe un réel r , et un seul, tel que $f(r) = 0$ et résoudre dans \mathbb{C} alors l'équation (E) d'inconnue z :

$$f(z) = 0. \quad (\text{E})$$

On appelle z_1, z_2 et z_3 les solutions de (E); on note Z le complexe

$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1.$$

Calculer Z . Déterminer le module et un argument de Z .

PROBLÈME

4 POINTS

La partie C du problème est indépendante des parties A et B

Partie A

Soit \mathcal{E} un espace vectoriel euclidien orienté de dimension trois dont une base orthonormée directe est $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soit φ l'endomorphisme de \mathcal{E} (application linéaire de \mathcal{E} dans \mathcal{E}) défini par

$$\begin{cases} \varphi(\vec{i}) &= \vec{k} \\ \varphi(\vec{j}) &= -\vec{j} \\ \varphi(\vec{k}) &= \vec{i} \end{cases}$$

Démontrer que φ est une isométrie vectorielle involutive de \mathcal{E} .

Déterminer $\varphi(\vec{i} + \vec{k})$ et $\varphi(\vec{i} - \vec{k})$.

Caractériser φ .

2. Soit Ψ le demi-tour vectoriel de \mathcal{E} (symétrie vectorielle orthogonale par rapport à une droite vectorielle) dont l'axe est la droite vectorielle de base (\vec{i}) .

On désigne par θ l'endomorphisme $\varphi \circ \Psi$ de \mathcal{E} .

- a. Déterminer $\theta(\vec{i})$, $\theta(\vec{j})$ et $\theta(\vec{k})$.
 b. Démontrer que θ est une rotation vectorielle dont l'axe \mathcal{D} est la droite vectorielle de base (\vec{j}) .

On désigne par \mathcal{P} le plan vectoriel orthogonal à \mathcal{D} . Dans la suite du problème le plan \mathcal{P} sera orienté : (\vec{k}, \vec{i}) est une base orthonormée directe; la droite vectorielle \mathcal{D} est alors orientée : (\vec{j}) est une base directe.

Donner une mesure de l'angle de la rotation vectorielle θ d'axe \mathcal{D} orienté.

Partie B

Soit E un espace affine euclidien associé à \mathcal{E} ; il est rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soit f l'application affine de E vers E qui est associée à l'endomorphisme φ et qui transforme le point O en le point A de coordonnées $(2; 0; 2)$.
- a. Définir analytiquement f .
 b. Démontrer que f est un vissage et que f est la composée, dans un ordre indifférent, d'un demi-tour affine (un demi-tour affine est également appelé un retournement) et d'une translation t ; préciser l'axe du demi-tour affine et le vecteur de la translation.
2. Soit g l'application affine de E vers E qui est associée à l'endomorphisme ψ et qui laisse le point O invariant.
 Caractériser g .
3. Soit h l'application affine de E vers E définie par $h = f \circ g$.
- a. Démontrer que $h = t \circ r$, où t désigne la translation définie au B 1. b. et r une rotation affine, dont on précisera l'axe (D) .
 b. On désigne par (P) le plan affine qui contient O et dont la direction est le plan vectoriel \mathcal{P} précédemment défini.
 Démontrer que (P) est globalement invariant par h .
 c. On note h' la restriction de h à (P) .
 Définir analytiquement h' , (P) étant rapporté au repère $(O; \vec{k}, \vec{i})$.
 Démontrer que h' est une rotation affine, dont on précisera le centre I et une mesure de l'angle.
 d. Démontrer que h est une rotation affine, dont on précisera l'axe (D') .
 La direction de (D') est orientée par le choix de la base directe (\vec{j}) : donner une mesure de l'angle de la rotation h .

4. On conserve l'orientation de la droite affine (D').

Soit alors W le vissage dont l'axe est (D'), dont l'angle admet pour mesure α , dont le vecteur est $-\alpha \vec{j}$.

À un point M quelconque, de coordonnées $(x; y; z)$, W associe le point

$M' = W(M)$ de coordonnées $(x'; y'; z')$.

Établir que l'on a

$$\begin{cases} x' &= x \cos \alpha + z \sin \alpha - 2 \sin \alpha, \\ y' &= y - \alpha, \\ z' &= -x \sin \alpha + z \cos \alpha - 2 \cos \alpha + 2. \end{cases}$$

Partie C

1. Soit u l'application de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} définie par

$$u: t \longmapsto u(t) = e^t + \text{Log } t.$$

Démontrer que u est une bijection de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} .

2. Soit v l'application de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} définie par

$$v: t \longmapsto v(t) = t^2 e^t - 1.$$

Étudier les variations de la fonction v .

3. u'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction u . Démontrer que, dans \mathbb{R}_+^* , l'équation $u''(t) = 0$ admet une solution unique t_0 et que l'on a $\frac{1}{2} < t_0 < 1$.

Étudier le signe de $u''(t)$ sur \mathbb{R}_+^* .

Partie D

Dans l'espace affine euclidien E , on considère le point mobile N dont les coordonnées, dans le repère \mathcal{R} , sont à l'instant t ($t \in \mathbb{R}_+^*$):

$$\begin{cases} x &= \cos u(t), \\ y &= u(t), \\ z &= 2 + \sin u(t). \end{cases}$$

On désigne par (C) la trajectoire de N .

- Démontrer que la projection orthogonale de (C) sur le plan (P) défini au B. 3. b. est un cercle, que l'on précisera.
- Quelles sont les coordonnées, à l'instant t , du point $W(N)$? En déduire que, à tout instant t ($t \in \mathbb{R}_+^*$), $W(N)$ est un point de (C) .
- Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ et le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(t)$ du point mobile N à l'instant t .
- Étudier le sens de variation de la fonction numérique qui, au réel strictement positif, t associe $\|\vec{V}(t)\|$.