

~ Baccalauréat C Nantes juin 1966 ~  
**Mathématiques élémentaires**

**EXERCICE 1**

Quels sont le module et l'argument de chacun des nombres complexes

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_2 = 1 + i?$$

En déduire les modules et les arguments de  $z_1 \times z_2$  et de  $\frac{z_1}{z_2}$ .

Utiliser les résultats trouvés pour calculer

$$\cos \frac{\pi}{12} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{12}.$$

**EXERCICE 1**

On donne un repère orthonormé dont les axes sont  $x'Ox$  et  $y'Oy$ . Soit A le point de  $x'Ox$  ayant 3 pour abscisse et soit (D) la droite ayant  $y = 1$  pour équation.

On désigne par (O) le cercle de centre O et de rayon  $\sqrt{2}$ , par (A) le cercle de centre A et de rayon 1. Un point M, d'abscisse  $x$ , varie sur (D).

1. Calculer, en fonction de  $x$ , les puissances  $P_A$  et  $P_O$  du point M par rapport aux cercles (A) et (O).

Étudier les variations du rapport

$$y = \frac{P_A}{P_O} = \frac{(x-3)^2}{x^2-1}.$$

lorsque M décrit la droite (D).

Tracer la courbe représentative ( $\Gamma$ ) de  $y(x)$ .

Pour quelles valeurs de  $x$  ce rapport a-t-il une valeur donnée  $k$ ?

Discuter. [On écrira l'équation qui donne  $x$  et l'on pourra discuter en utilisant la courbe ( $\Gamma$ ).]

Considérer en particulier la valeur  $k = 1$ .

Montrer qu'une valeur de  $k$  pour laquelle il existe deux points,  $M'$  et  $M''$ , distincts ou confondus peut s'exprimer en fonction de l'abscisse  $X$  du milieu, N, de  $M'M''$ .

Montrer que  $X$  ne peut pas prendre une valeur quelconque; quelles sont les valeurs possibles de  $X$ ?

2. On appelle C la projection du point N sur  $x'Ox$ .

Évaluer le rapport  $\frac{\overline{CA}}{\overline{CO}}$ .

On considère le cercle (C) de centre C qui passe par les points  $M'$  et  $M''$ . Calculer la puissance par rapport à (C) du point B d'intersection de (D) et de la droite ( $\Delta$ ) d'équation  $x = \frac{5}{3}$ .

Quels sont les axes radicaux des trois cercles (O), (A) et (C)?

Que peut-on dire de ces trois cercles? Montrer que, pour tout point P du cercle (C), le rapport de ses puissances par rapport au cercle (A) et par rapport au cercle (O) est égal à  $k$ .

3. Les cercles (O) et (A) déterminent un faisceau à points de Poncelet, I et J<sup>1</sup>.

Quelles sont les abscisses de ces points ?

M étant toujours un point quelconque de (D), on appelle V le point commun aux polaires de M par rapport aux cercles (O) et (A). Montrer que ces polaires passent chacune par un point fixe, dont on précisera les coordonnées, et que le cercle de diamètre MV passe par I et J.

Déterminer analytiquement la courbe sur laquelle se déplace le point V lorsque M décrit (D). (On pourra, pour cela, former une relation vérifiée par les coordonnées de V quelle que soit la position de M sur la droite qu'il décrit.)

---

1. N. B. - La question 3 est indépendante du reste du problème.