# Nantes juin 1967
# Baccalauréat mathématiques élémentaires

**EXERCICE 1**

On désigne par $f$ la fonction de la variable réelle $x$ telle que l'on ait

$$f(x) = y = \cos^3 x - \frac{3}{2}\cos x.$$

Étudier ses variations et tracer son graphique dans un repère orthonormé.
Indiquer la période de la fonction et les éléments de symétrie du graphique.

**EXERCICE 2**

On donne, dans un plan orienté, trois droites, $D_1$, $D_2$ et $D_3$, concourantes en O et satisfaisant à

$$(D_1,\ D_2) = \frac{\pi}{6} \quad (\text{mod}\,\pi),$$

$$(D_2,\ D_3) = \frac{\pi}{4} \quad (\text{mod}\,\pi),$$

On désigne respectivement par $S_1, S_2, S_3$ les symétries axiales planes par rapport à ces trois droites.

1. Indiquer la nature de la transformation ponctuelle plane, $T$, définie par

$$T = S_{a3} \circ S_2 \circ S_1$$

(composition des symétries axiales planes autour de $D_1$, $D_2$, $D_3$ prises dans cet ordre).

2. Indiquer la nature de la transformation ponctuelle plane, $T_1$ définie par

$$T_1 = S_1 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1.$$

(composition des symétries axiales planes autour de $D_1$, $D_2$, $D_3$ et $D_1$, prises dans cet ordre.)

**EXERCICE 3**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé dont les axes sont $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$.
Un point $m$, de coordonnées $(x\,;\ y)$, étant donné, on appelle $M$ le point de coordonnées

$$(1) \qquad X = \frac{ax}{2x-a} \quad \text{et} \quad Y = \frac{ay}{2x-a}$$

où $a$ est un nombre réel donné, strictement positif.

1. **a.** Quel est l'ensemble des points $m$ du plan pour lesquels $M$ n'existe pas ?
   Dans toute la suite du problème on supposera que $m$ n'appartient pas à cet ensemble ; les formules (1) définissent alors une transformation ponctuelle $T$ qui associe $M$ à $m$.
   Quel est l'ensemble des points invariants dans $T$ ? Quelle est la transformation réciproque de $T$ ?

   **b.** Quel est le transformé d'un point de l'axe $y'\text{O}y$ ? Quel est l'ensemble des points transformés des points d'une droite $(\Delta)$ dans les cas particuliers suivants :

($\Delta$) passe par le point A($a$ ; 0) ;

($\Delta$) est parallèle à $y'\text{O}y$ ;

($\Delta$) est parallèle à $x'\text{O}x$ ?

**2.** Démontrer que les points O, $m$ et $M$ sont alignés et que les projections orthogonales de $m$ et $M$ sur $x'\text{O}x$ sont conjuguées harmoniques par rapport à O et A.

En déduire une définition géométrique de la transformation $T$ et donner une solution géométrique aux questions du 1.

**3.** Trouver l'équation de la courbe ($F$), transformée du cercle ($C$) passant par O et centré en ($\lambda$ ; 0) : on supposera $\lambda \neq 0$.

Discuter, suivant les valeurs de $\lambda$, de la nature géométrique de ($F$) et indiquer dans chaque cas ses éléments de symétrie.

On tracera ($F$) dans les trois cas suivants :

$\lambda = -\dfrac{a}{4}$,

$\lambda = \dfrac{a}{4}$,

$\lambda = \dfrac{a}{2}$.

**4.** Déterminer $c$ en fonction de $a$ et de $\lambda$ pour que le cercle ayant pour équation

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + c = 0$$

soit transformé en un cercle. On appelle ($\Gamma$) tout cercle jouissant de cette propriété.

Quel est alors le cercle transformé de ($\Gamma$) ?

Montrer que la polaire de O par rapport à tous les cercles ($\Gamma$) est une droite fixe.

En déduire que les cercles ($\Gamma$) forment un faisceau, dont on précisera la nature et dont on déterminera l'axe radical.

**N. B.** - Les questions 2, 3 et 4 sont indépendantes.