Baccalauréat Nantes septembre 1966
série mathématiques élémentaires

I.

Soit $Z = \dfrac{z+2\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$ avec $z = x + \mathrm{i}y$.

1. Déterminer l'ensemble des points m, image de z, tels que le module de Z soit égal à 2.
2. Déterminer l'ensemble des points m, image de z, tels que l'argument de Z soit égal à $\dfrac{\pi}{2}$ (mod. 2π).

Chacune des deux questions pourra être traitée, soit géométriquement, soit analytiquement, soit (ce qui serait préférable) par les deux procédés.

II.

On donne un cercle fixe (0) ; son centre est O, son rayon est a.
Sur un axe fixe, Ox, on marque un point fixe, F ; $\overline{\mathrm{OF}} = c > 0$, avec $c \neq a$.
À tout point A variable sur (O) on associe le point A$'$ où la droite AF recoupe le cercle (O).

1. Démontrer que, lorsque A décrit (O), le cercle circonscrit au triangle AA$'$O recoupe la droite OF en un point fixe, H, que l'on déterminera par son abscisse.
   Démontrer que, si un cercle passant par O et H coupe (O) en A et A$'$, la droite AA$'$ passe par F.
2. On pose $c = ak$ (avec $k \neq 1$). Le point A est déterminé par $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}x},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = \theta$ (mod. 2π).
   Soit Oy un second axe défini par $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}x},\ \overrightarrow{\mathrm{O}y}\right) = \dfrac{\pi}{2}$; Ox et Oy constituent un repère orthonormé.
   Écrire, dans ce repère, l'équation du cercle circonscrit du triangle OAN (certains coefficients figurant dans cette équation dépendent de θ) ; on supposera que A n'est pas sur la droite OF.
   Étudier les variations, en fonction de θ, de l'ordonnée $\lambda(\theta)$ du centre de ce cercle ; on distinguera les deux cas :
   $$0 < k < 1 \quad \text{et} \quad 1 < k.$$
   Tracer les graphes correspondants.
3. Soit B le point diamétralement opposé à A$'$ sur (O) ; la parallèle à A$'$B issue de F coupe AB en M ; le pôle de la droite AB par rapport à (O) est noté P.
   Démontrer que les triangles AFM et AOP sont directement semblables ; en déduire que PM est perpendiculaire à OF ; on notera L le point commun à ces deux droites.
   Démontrer que les triangles AHL et AFM sont directement semblables ; en déduire la relation
   $$\frac{\overline{\mathrm{LP}}}{\overline{\mathrm{LM}}} = \frac{\overline{\mathrm{HO}}}{\overline{\mathrm{HF}}}.$$
4. Trouver, lorsque A décrit (O), l'enveloppe de la droite AB et montrer que M est le point de contact de cette droite et de son enveloppe.
   Cette courbe sera d'abord définie géométriquement.
   On écrira ensuite son équation rapportée aux axes Ox et Oy déjà utilisés.
   Déterminer par son équation l'ensemble des points P.
   On étudiera, en particulier, le cas où a est egal à $c\sqrt{2}$.