Baccalauréat Nantes septembre 1967
Mathématiques élémentaires

I.

Les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ étant les vecteurs unitaires portés respectivement par les axes $x'\mathrm{O}x$ et $y'\mathrm{O}y$ d'un repère orthonormé, un point M est défini en fonction de la variable réelle t par

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \left(a \,\mathrm{Log} t\right)\vec{\imath} + \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\vec{\jmath},$$

où Log t désigne le logarithme népérien de t et a est une constante positive donnée.
Comment faut-il choisir t pour que M soit défini ?
Déterminer le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{V}}$, dérivée vectorielle de $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.
Par le point O, on trace $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{V}}$.
Quel est l'ensemble des points P ainsi obtenus ?

II.

Déterminer x et y, entiers, positifs ou nuls, vérifiant la relation

$$x^2 - y^2 = 24.$$

III.

1. Les axes de coordonnées $x'\mathrm{O}x$ et $y'\mathrm{O}y$ étant quelconques, on donne l'ensemble (F) de quatre points :

$$\mathrm{A}(a\,;\,0);\quad \mathrm{B}(a\,;\,b);\quad \mathrm{C}(-a\,;\,b);\quad \mathrm{D}(-a\,;\,0)\,;$$

   a et b sont des réels constants et positifs.
   On considère l'ensemble $\left(\mathrm{F}'\right)$ des points A$'$, B$'$, C$'$ et D$'$ respectivement homothétiques de A, B, C et D dans l'homothétie H de centre O et de rapport k (où k est un réel strictement positif).

   a. Par application d'une propriété caractéristique de l'homothétie, démontrer que, k étant fixé, il existe une homothétie, H$'$ qui transforme respectivement A, B, C, D en C$'$, D$'$, A$'$, B$'$: exprimer à l'aide de b et k les coordonnées du centre, O$'$, de H$'$; déterminer le rapport de H$'$.

   b. Vérifier que, si l'on effectue la transformation H puis la transformation réciproque de H$'$, la transformation obtenue est la symétrie par rapport au point $\mathrm{I}\left(0\,;\,\dfrac{b}{2}\right)$.

   c. On appelle J le point de coordonnées $(0\,;\,b)$.
   Démontrer que la division (O, O$'$, I, J) est harmonique.

2. Dans tout ce qui suit, le repère est orthonormé ; les notations restent les mêmes.
   Il existe alors un cercle fixe circonscrit à ABCD et un cercle, variable avec k, circonscrit à A$'$B$'$C$'$D$'$.
   Lorsque k est donné, quels sont les centres d'homothétie de ces deux cercles ?
   Pour chaque valeur de k, ces deux cercles définissent un faisceau, dont on déterminera l'axe radical.
   Démontrer que le cercle de diamètre OO$'$ appartient à ce faisceau.
   Examiner le cas où $k = 1$.

3. Déterminer par son équation la courbe décrite par l'orthocentre du triangle AB$'$D lorsque k prend toutes les valeurs réelles positives ; tracer cette courbe.

Calculer, à l'aide de a et b, l'aire, S, du domaine compris entre Ox, la courbe ainsi tracée et les parallèles à Oy ayant pour abscisses respectives

$$x_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad x_2 = a.$$