

∞ **Baccalauréat New York série mathématiques** ∞
juin 1952

I. - 1^{er} sujet.

Qu'appelle-t-on figures égales ?

Montrer que toute figure égale à une droite ou à un plan est une droite ou un plan.

I. - 2^e sujet

Étude du produit de deux homothéties

I. - 3^e sujet

Définition des faisceaux de cercles ; leur classification en faisceaux des différents genres.

II.

Si m est un nombre entier supérieur à zéro, on désigne par S_m la somme de tous les entiers de 1 à m , c'est-à-dire

$$S_m = m \left(\frac{m+1}{2} \right).$$

1. Soit a un entier impair. Montrer que, si m et n sont des entiers tels que $n - m$ soit divisible par a , $S_n - S_m$ est divisible par a .

Quels sont tous les nombres qui peuvent s'obtenir comme reste de divisions de nombres de la forme S_m par 11 ?

2. Soit x un nombre supérieur à 1 ; on désigne par $f(x)$ le plus grand des nombres S_m qui sont au plus égaux à x .

Montrer qu'il y a une constante c (indépendante de x) telle que

$$x - f(x) < (2x)^{\frac{1}{2}} + c.$$

3. Montrer que, si m et n sont des entiers supérieurs à zéro, il est impossible que S_n soit le double de S_m (on pourra utiliser le fait que $2m - n$ divise $4m^2 - n^2$).

4. On se propose d'étudier les nombres n pour lesquels S_n est un carré parfait (c'est-à-dire le carré d'un entier).

Montrer que, s'il en est ainsi, celui des nombres n , $n + 1$ qui est impair est lui-même un carré parfait.

On montrera que S_8 est un carré parfait, et que, si S_n est un carré parfait (avec n pair), il en est de même de $S_{n'}$ si $n' = 4n(n + 1)$; on en déduira qu'il y a une infinité de nombres pairs tels que S_n soit carré parfait.

On établira réciproquement que, si n est un nombre pair tel que n soit carré parfait, on a $n = 4k(k + 1)$, où k est un entier tel que S_k soit carré parfait.

5. Montrer qu'il n'y a aucun entier impair $n > 1$ tel que S_n soit carré parfait.

Pour ce faire on pourra poser $n = (2k + 1)^2$ et se ramener à la dernière question en montrant que S_k devrait être de la forme $2S_p$ pour un certain entier p .

Quels sont les trois plus petits entiers $n > 1$ pour lesquels S_n est carré parfait ?